



روزی نشست بر پاره‌سنگی
با انگشتانی گره‌کرده در زیر چانه‌اش
و خیره نگاهی تا بی‌انتها

آرام آرام شرار و سوسه‌ای در رگ‌هایش دوید
و هُرم قدرتی سترگ، ساق‌های بی‌قرارش را در هم نوردید

ناگاه به پا خاست
و گام در راهی نهاد
بی‌انتها

– انسان را می‌گویم –
او ناچار رفتن بود و یافتن
شاید به این امید که روزی، بر فراز قلّه‌ی دریافتن، پاتابه وا کند و یله بر چارطاق نیلی چرخ دهد.

تقدیم به شما و همه‌ی آن‌هایی که
برای «یافتن»

راهی جز «دریافتن» نمی‌شناسند.

سرشناسه : سیدموسوی، حسین، ۱۳۳۸ -
عنوان و نام پدیدآور : هندسه را درست یاد بگیریم / سیدحسین سیدموسوی.
مشخصات نشر : تهران: دریافت، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری : ۲۵۶ ص.
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۶۷۷۳۱۴-۰
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
شماره کتابشناسی ملی : ۷۳۶۸۰۱۳
وضعیت رکورد : فیپا

عنوان کتاب: هندسه را درست یاد بگیریم

نویسنده: سید حسین سید موسوی

ناشر: نشر دریافت

ناظر چاپ: سعید حیدری

طراح جلد: ایمان خاکسار

صفحه آرا: شاهرخ آریا

حروفچین: فرناز صفی، افسانه بابایی

نوبت چاپ: اول - ۱۴۰۳

شمارگان: ۸۰۰ جلد

بها: ۱۸۹۰۰۰ تومان

تلفن های دفتر نشر: ۰۲۱ - ۶۶۹۵۰۳۹۲ و ۰۲۱ و ۰۶۶۹۵۰۶۲۴ - ۰۲۱

نشانی اینترنتی: www.Daryaftpub.com

نشانی پست الکترونیک: daryaftpub@gmail.com

حق چاپ و نشر این کتاب متعلق به ناشر بوده و هرگونه کپی یا نقل مطالب بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد.

پیش‌گفتار.....	۴
بخش ۱: مقدمه ای بر هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی.....	۶
بخش ۲: هندسه را چگونه آغاز می‌کنند؟.....	۱۴
بخش ۳: معرفی دو مدل مهم.....	۲۰
بخش ۴: مدل دیسک پوانکاره.....	۲۸
بخش ۵: چند مدل جالب از هندسه وقوع.....	۳۸
بخش ۶: هندسه متریک.....	۵۰
بخش ۷: تابع فاصله روی مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره.....	۵۶
بخش ۸: فاصله در مدل دیسک پوانکاره.....	۶۲
بخش ۹: فاصله در مدل مولتون.....	۶۶
بخش ۱۰: فاصله در مدل با خط‌های سهمی.....	۷۰
بخش ۱۱: مدل دکارتی با فاصله تاکسی و تابع فاصله در مدل نوار مفقود.....	۷۴
بخش ۱۲: دایره در هندسه متریک.....	۷۸
بخش ۱۳: بینیت.....	۸۴
بخش ۱۴: پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها.....	۹۰
بخش ۱۵: زاویه و مثلث در هندسه متریک.....	۹۸
بخش ۱۶: مجموعه‌های محدب و اصل جداسازی صفحه.....	۱۰۴
بخش ۱۷: هندسه پاش.....	۱۱۴
بخش ۱۸: قضیه قطعه‌بُر.....	۱۲۰
بخش ۱۹: تابع اندازه زاویه و هندسه نقاله‌ای.....	۱۲۶
بخش ۲۰: اندازه زاویه در مدل صفحه اقلیدسی و مدل‌های پوانکاره.....	۱۳۴
بخش ۲۱: اندازه زاویه در مدل با خط‌های سهمی و مدل مولتون.....	۱۴۰
بخش ۲۲: عمود بودن دو خط و عمودمنصف یک پاره‌خط.....	۱۴۸
بخش ۲۳: هندسه خنثی (هندسه بی‌طرف نسبت به اصل توازی).....	۱۵۶
بخش ۲۴: قضیه ض ض ض و اثبات وجود عمود از یک نقطه خارج یک خط.....	۱۶۶
بخش ۲۵: قضیه زاویه خارجی و نتایج آن.....	۱۷۴
بخش ۲۶: قضیه‌های هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه.....	۱۸۲
بخش ۲۷: زاویه‌های متبادل داخلی و قضیه‌های مربوط به آن.....	۱۹۰
بخش ۲۸: در جست‌وجوی مستطیل.....	۲۰۰
بخش ۲۹: چهارضلعی خیام - ساگری.....	۲۰۶
بخش ۳۰: انواع موازی‌ها در مدل دیسک پوانکاره.....	۲۱۶
بخش ۳۱: زاویه توازی و قضیه همه یا هیچ.....	۲۲۴
بخش ۳۲: مقدمات هندسه هیپربولیک.....	۲۳۴
بخش ۳۳: هندسه هیپربولیک.....	۲۴۴
کتابنامه.....	۲۵۶

پیش‌گفتار

هدف این کتاب؟

می‌خواهیم خواننده را به سفری هیجان‌انگیز و جذاب ببریم.

در این سفر چه می‌بینیم؟

در این سفر رؤیایی، خواننده لحظه لحظه ساختن بنای باشکوه هندسه را مشاهده می‌کند.

پیام این کتاب چیست؟

مهم‌ترین پیام کتاب حاضر این است:

همیشه بگوییم: **با فرض اینکه گزاره A را بپذیریم، گزاره B برقرار است.**

یعنی چه؟

گزاره زیر را در نظر بگیرید.

«در یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین اندازه دو زاویه حاده آن 45° درجه است.»

آیا این گزاره درست است؟

بله، زیرا مجموع اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث برابر با 180° درجه است.

چرا این مجموع برابر با 180° است؟

زیرا «از هر نقطه خارج یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.»

چرا این گزاره‌ای که اشاره کردید درست است؟

چون جناب اقلیدس آن را پذیرفته‌اند.

البته، جناب اقلیدس در کتاب «اصول» خود دقیقاً این گزاره را نیاورده‌اند، بلکه معادل آن را آورده‌اند.

حال چرا باید به گفته اقلیدس اعتماد کرد؟

بیش از دو هزار سال است که بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان آن را پذیرفته‌اند؛ چرا باید شک کنیم؟

آیا این گزاره به اقلیدس الهام شده است؟

به نظر من، اقلیدس به دور و بر خودش نگاه کرده و دیده جهان این طور است و سپس چنین گزاره‌ای را پذیرفته است.

اما من جهان را این طور نمی‌بینم. در جهان من از یک نقطه خارج یک خط / بی‌شمار خط به موازات خط / می‌توان رسم کرد.

در چه جهان عجیب و غریبی زندگی می‌کنید. پس موجودات این جهان شما واقعی نیستند.

موجودات جهان من (مثلث، دایره و ...) به همان اندازه جهان اقلیدسی واقعی‌اند. گرچه ویژگی‌هایشان گاهی متضاد هم هستند.

نام جهان من هندسه اقلیدسی است. حتماً نام جهان شما هندسه نااقلیدسی است.

بله، جهانی که من در آن زندگی می‌کنم، یکی از انواع هندسه‌های نااقلیدسی به نام هندسه هیپر بولیک است.

گفتید که در هندسه ناقلیدسی، از نوع هیپربولیک، برای یک خط l و یک نقطه P خارج خط l ، بی‌شمار خط موازی با l وجود دارد. آیا همه این موازی‌ها ویژگی‌های یکسان دارند؟

نه، بعضی از این خط‌های موازی، موازی‌ترند.

موازی‌تر؟ واقعاً یاد جمله معروف کتاب قلعه حیوانات افتادم: «همه حیوانات برابرند، اما بعضی برابرترند.»

دو تا از این موازی‌ها را «موازی مجانبی» و موازی‌ترها را «موازی واگرا» می‌گوییم.

تفاوت دیگر هندسه ناقلیدسی از نوع هیپربولیک با هندسه اقلیدسی؟

در هندسه هیپربولیک مستطیل ناپدید می‌شود و تبدیل به افسانه می‌شود.

گفته می‌شود که دو هزار سال طول کشید «تا هندسه ناقلیدسی کشف شود. چرا این قدر طولانی؟

نشان‌دهنده ضعف بشر در تغییر باورهای تثبیت شده است.

چطور؟

برای اینکه فکر می‌کردند فقط یک هندسه وجود دارد و آن همان هندسه اقلیدسی است.

به نظر می‌رسد که درک هندسه ناقلیدسی ساده نیست!

با روش این کتاب، درک هندسه ناقلیدسی (از نوع هیپربولیک) ساده‌تر می‌شود.

چگونه؟

با ارائه زود هنگام هندسه ناقلیدسی از همان بخش‌های اولیه کتاب با آوردن مدل‌های پوانکاره.

باتشکر از

دکتر ناصر بروجردیان برای پالایش، پیرایش و ویرایش کتاب از ناراستی‌های منطقی در بحث‌ها

از حمیدرضا ملکی به خاطر خواندن دقیق همه بخش‌های کتاب و ارائه نظریات مفید

از حسین نوری به دلیل رفتار حرفه‌ای دلسوزانه‌شان

از دکتر سبطی مدیر انتشارات دریافت برای قبول چاپ کتاب

از صفحه‌آرای کتاب، شاهرخ آریا، از رسم‌کننده شکل‌های کتاب، زهرا امین صادقیه، و از حروف‌نگاران، خانم فرناز صفی

و خانم افسانه بابایی.

بخش ۱

مقدمه ای بر هندسه اقلیدسی و ناقلیدسی

در این کتاب، هندسه (اقلیدسی و ناقلیدسی) چگونه ارائه می شود؟

هندسه اقلیدسی و هندسه ناقلیدسی اشتراک هایی دارند؛ ابتدا از این مشترکات شروع می کنیم. این زمینه مشترک را **هندسه خنثی (نتاری)** می نامند. نتاری ترجمه کلمه **neutral** است که به صورت **بی طرف** هم ترجمه شده است. یعنی در شروع ارائه هندسه، در مورد پذیرفتن یا نپذیرفتن اصل پنجم اقلیدس **بی طرف هستیم** و با آن کاری نداریم. با این روش، شما خیلی از قضیه های آشنای هندسه اقلیدسی را در ابتدا نخواهید دید؛ حتی در مواردی، قضیه هایی را خواهید دید که معمولاً در کتاب های مقدماتی هندسه آن ها را بیان نمی کنند.

منظور شما از قضیه های آشنای هندسه اقلیدسی کدام قضیه است؟

در زیر، تعدادی از این قضیه ها را می آوریم که قبل از مطرح شدن اصل توازی، نمی توان این قضیه ها را ارائه کرد.

(۱) مجموع اندازه های زاویه های هر مثلث برابر با 180° است.

(۲) در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور است.

(۳) هر چهار ضلعی که دارای سه زاویه قائمه باشد، مستطیل است.

(۴) دو خط که با یک خط سوم موازی اند، خودشان موازیند.

(۵) هر دو خط موازی دارای یک عمود مشترک اند.

(۶) فاصله هر دو خط موازی همه جا یکسان است.

یعنی در «هندسه بی طرف» این قضیه ها نادرست اند؟

از آنجا که هندسه خنثی نسبت به اصل توازی بی طرف است، نسبت به این قضایا نیز بی طرف است. در نتیجه، این گزاره ها در بعضی از مدل های هندسه خنثی درست اند و در بعضی از مدل های آن، نادرست اند.

مدل در هندسه به چه معنا است؟

گزاره «دو خط متقاطع فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند» را در نظر بگیرید. وقتی این گزاره را می خوانید، چه تصویری از آن در ذهن شما شکل می گیرد؟



من دو سیم فلزی مستقیم را تصور می‌کنم که همدیگر را قطع کرده‌اند و نقطه تقاطع‌شان یک نقطه است.

کاری که شما انجام دادید، در نظر گرفتن یک مدل فیزیکی برای این گزاره است. یعنی وقتی خط‌ها را دو سیم فلزی فرض می‌کنید؛ با این کار، مفاهیم نقطه و خط را به صورت واقعی در آورده‌اید. در هندسه، این کار را به این صورت انجام می‌دهند که از جاهای دیگر ریاضیات که با آن آشنا هستیم، مثال‌هایی مطرح می‌کنند که در اصول موضوعه صدق کنند؛ به این مثال‌ها مدل می‌گویند. یک مدل چیزی نیست جز یک مثال.

یک مدل برای یک هندسه با ارائه دو مجموعه، یکی مجموعه نقاط و دیگری مجموعه خط‌ها بنا می‌شود؛ بعد اگر این دو مجموعه در اصل‌های داده‌شده آن هندسه صدق کنند، این مثال را یک مدل آن هندسه می‌گوییم. مثلاً، مجموعه $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. به هر مجموعه نقاط که در معادله $ax + by + c = 0$ صدق کند (حداقل یکی از دو عدد a و b ناصفر است) یک خط می‌گویند. فاصله دو نقطه، و اندازه زاویه به همان شکلی که می‌دانید معرفی می‌شود. با این کار، ما یک مدل برای هندسه (اقلیدسی)، ساخته‌ایم. در این مدل، تمام گزاره‌های ۱ تا ۶، که در بالا آورده شد، درست است. اما می‌توان مدل‌های دیگری از هندسه خنثی ساخت که هیچ کدام از این گزاره‌ها درست نباشند. مثلاً مدل‌هایی می‌توان ارائه داد که مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک مثلث اکیداً کمتر از 180° باشد.



نمی‌توانم تصور کنم که مثلثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن غیر از 180° درجه باشد. آیا مثلثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن، مثلاً، 23° درجه باشد؟

اگر شما فقط هندسه اقلیدسی را مطالعه کرده باشید، باور این که مثلثی وجود داشته باشد که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن 23° درجه باشد سخت است. علتش این است که شما عادت کرده‌اید که اقلیدسی فکر کنید. یکی از مهم‌ترین اهداف این کتاب، آن است که هندسه را طوری یاد بگیریم که این عادت اقلیدسی را از خواننده بگیریم و ابتدا با مفاهیم و قضیه‌های هندسه مطلق (خنثی) آشنا شود. بعد خواننده به راحتی می‌تواند تفاوت‌های بین هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی را درک کند.

بعداً خواهیم دید که مدل‌هایی از هندسه خنثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زاویه‌ای یک مثلث کمتر از 180° است؛ حتی می‌توان در این مدل‌ها، مثلثی یافت که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن مثلاً 1° درجه است.



در بحث‌های بالا، مرتباً از هندسه اقلیدسی نام بردید؛ واقعاً هندسه اقلیدسی چیست؟

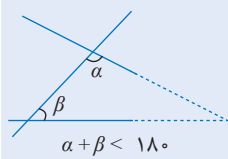
در مطالعه هندسه به صورت اصل موضوعی شما به جایی می‌رسید که باید انتخاب کنید که آیا گزاره زیر را می‌پذیرید یا نه.

«مجموع اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث برابر با 180° درجه است.»

اگر این گزاره را بپذیرید، شما هندسه‌ای را قبول کرده‌اید که به آن هندسه اقلیدسی می‌گویند.

چرا اقلیدسی؟

چون اقلیدس گزاره زیر را به عنوان اصل پذیرفت.



شکل ۱-۱

اصل پنجم اقلیدس اگر خط راستی دو خط راست را قطع کند و مجموع دو زاویه درونی که در یک طرف خط (قاطع) تشکیل می‌دهند از دو زاویه قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر به طور نامتناهی امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، قطع می‌کنند.

حالا این اصل پنجم اقلیدس چه ارتباطی به «مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث برابر با 180° است» دارد؟

ثابت می‌شود که با استفاده از اصل پنجم اقلیدس، می‌توان گزاره «مجموع اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث برابر با 180° درجه است.» را ثابت کرد. و برعکس، با استفاده از گزاره «در هر مثلث مجموع اندازه‌های زاویه‌ها برابر با 180° است» می‌توان اصل پنجم اقلیدس را ثابت کرد. اصطلاحاً می‌گویند این دو گزاره معادل‌اند؛ یعنی هر کدام را بپذیرید، دیگری ثابت می‌شود.

آنچه که من در کتاب‌ها دیده‌ام، اصل پنجم اقلیدس را به صورت زیر بیان می‌کنند.

اصل توازی (پلی‌فیر)^۱: از هر نقطه خارج یک خط l فقط یک خط به موازات خط l وجود دارد.
چرا یک گزاره پیچیده‌تر را به عنوان اصل پنجم اقلیدس مطرح کردید؟

حقیقت آن است که در کتاب «اصول» اقلیدس، اصل پنجم به آن صورتی است که ما آوردیم؛ ولی بعداً در کتاب‌های درسی، اصل توازی اقلیدسی (اصل پلی‌فیر) به دلیل سادگی‌اش جایگزین شد. از زمان اقلیدس تا اواسط قرن نوزدهم، هندسه‌دانان با اصل پنجم اقلیدس راحت کنار نمی‌آمدند؛ زیرا به دلیل طبیعت نامتناهی بودنش، نمی‌پذیرفتند که این اصل بدیهی است. تاریخ اصل پنجم خیلی هیجان‌انگیز است. بسیاری از ریاضی‌دانان تلاش کردند که اصل پنجم را ثابت کنند؛ فهرست بلندی از این تلاش‌های ناموفق را می‌توان ارائه داد.

چرا ناموفق بودند؟

این عدم موفقیت‌ها، به این دلیل بود که یک جایی در اثبات‌شان از فرض‌هایی اضافی استفاده کرده بودند که همه معادل اصل پنجم بودند.

در بالا، زیاد از اصل موضوع صحبت کردید؛ به چه گزاره‌هایی اصل موضوع می‌گویند؟

اجازه دهید یک سؤال مطرح کنم: چرا گزاره زیر درست است؟

اگر سه ضلع یک مثلث هم اندازه باشند (یعنی اگر این مثلث متساوی‌الاضلاع باشد) آنگاه اندازه زاویه‌های آن برابر و مساوی با 60° درجه است.

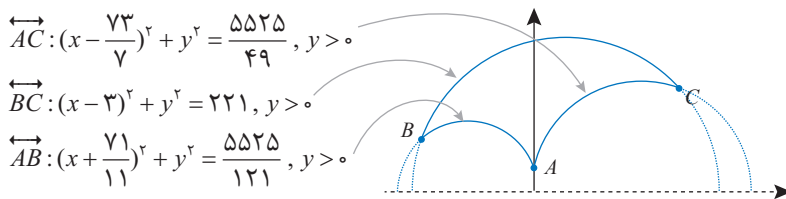
اثبات این گزاره ساده است. می‌دانیم در هر مثلث مجموع اندازه‌های سه زاویه برابر با 180° است؛ بنابراین در مثلث متساوی‌الاضلاع، که سه زاویه هم‌نهشت دارد، هر کدام از زاویه‌ها اندازه‌ای برابر با 60° دارند.

ملاحظه می‌کنید که در اثبات گزاره بالا شما از این موضوع استفاده کرده‌اید که **مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک مثلث برابر با 180° است**. در بالا دیدیم که اگر این گزاره را بپذیریم، هندسه‌ای که می‌خوانیم **هندسه اقلیدسی** نامیده می‌شود. پس شما عملاً گزاره زیر را ثابت کرده‌اید.
در هندسه اقلیدسی، اندازه هر زاویه یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با 60° درجه است.

حالا اگر درستی گزاره «مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک مثلث برابر با 180° است» را نپذیریم چه اتفاقی می‌افتد؟ اتفاقی که می‌افتد آن است که هندسه‌ای که می‌خوانید هندسه اقلیدسی نیست. اگر نقیض این گزاره را بپذیریم، هندسه به دست آمده را **هندسه نااقلیدسی** می‌گویند.

فرض کنید نقیض این گزاره را بپذیریم؛ در این صورت، اندازه هر زاویه یک مثلث متساوی‌الاضلاع چقدر است؟ نقیض گزاره «مجموعه اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث برابر با 180° درجه است» عبارت است از «**مثلثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن بیش از 180° یا کمتر از 180° است**». اجازه دهید حالتی را بررسی کنیم که مثلثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن کمتر از 180° است. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید هندسه‌ای که در آن قرار داریم در همه اصول هندسه اقلیدسی صدق می‌کند؛ غیر از آنکه **مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث کمتر از 180° است**. در این صورت اتفاقات عجیب و غریبی رخ می‌دهد. مثلاً در شکل ۲-۱، یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌بینید که هر زاویه آن برابر با $70^\circ / 28 \approx \cos^{-1} \frac{15}{17}$ است؛ در نتیجه، مجموع اندازه‌های زاویه‌های این مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با $84^\circ / 2$ درجه است.

باور کردن مثلثی که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن $84^\circ / 2$ درجه است، کمی سخت است. آیا واقعاً شکل ۲-۱ یک مثلث است؟ مگر هر ضلع یک مثلث پاره‌ای از یک خط راست نیست؟ در اینجا، ضلع‌های این شکل منحنی هستند. در این کتاب، یاد می‌گیریم که تصور از خط به صورتی نیست که در کتاب‌های هندسه دبیرستان بیان می‌شود. در هندسه، **ما خط داریم نه خط راست**. چگونگی خط‌ها بستگی به مدلی دارد که انتخاب کرده‌ایم. در شکل ۲-۱، هر کدام از این ضلع‌ها (که به صورت منحنی اند) پاره‌ای از سه خط به معادلات زیر هستند.



شکل ۲-۱

بعداً، در این کتاب، خواهیم دید که در یکی از مدل‌های هندسهٔ هیپر بولیک، این نیم‌دایره‌ها، خط‌های آن مدل هستند و کمان‌های $\widehat{AB}$ ، $\widehat{AC}$ و $\widehat{BC}$ پاره خط هستند که سه ضلع $\triangle ABC$ را تشکیل می‌دهند. اجازه دهید این بخش را با پرداختن به بحث «دستگاه اصل موضوعی» به پایان ببریم.

ابتدا این سؤال را مطرح می‌کنیم. آیا می‌توانید بگویید نقطه و خط واقعاً چه هستند؟

من فقط می‌توانم تعریف اقلیدس از نقطه و خط را تکرار کنم که در کتاب «اصول» آمده است:

نقطه آن است که جزء ندارد.

خط طولی بدون عرض است.

می‌دانیم که این روش ارائه تعریف برای نقطه و خط منجر به دور می‌شود.

حالا واقعاً نقطه و خط چه هستند؟

همان‌طور که می‌دانید ما نمی‌توانیم در یک دستگاه اصل موضوعی همه چیز را ثابت کنیم و ناچاریم برخی گزاره‌ها را به عنوان اصل موضوع، بدون اثبات، بپذیریم. در مورد تعریف‌ها هم همین‌طور است و ما نمی‌توانیم همه چیز را تعریف کنیم و ناچاریم برخی مفاهیم را تعریف نشده بپذیریم. بنابراین مفاهیم نقطه و خط را تعریف نشده می‌گیرند.

تعریف نشده یعنی چه؟

یعنی نقطه و خط را براساس مفاهیم دیگر تعریف نمی‌کنیم.

چطور می‌خواهید هندسه را براساس چیزهای تعریف نشده بنا کنید؟ من حداقل یک توصیف خوب از نقطه و خط

می‌خواهم. مثلاً در برخی از کتاب‌ها می‌گویند که می‌توانید نقطه را اثر نوک یک مداد تیز فرض کنید؛ اما من یک

توصیف ریاضی می‌خواهم.

تعریف نشده بودن نقطه و خط به معنای آن است که خود دستگاه اصل موضوعی هندسه دربارهٔ آن‌ها چیزی نمی‌گوید.

واقعیت نقطه و خط توسط مدل انتخاب شده معین می‌گردد و با تغییر مدل، چگونگی نقطه و خط عوض خواهند شد.

اگر واقعاً یک توصیف دقیق از نقطه و خط می‌خواهید، این است:

نقطه، یک نقطه است.

خط، یک خط است.

فکر می‌کنم دارید مزاح می‌کنید!

به خاطر اصرار شما، مجبور شدم که نقطه را براساس خود نقطه تعریف کنم. واقعاً، به هر عضو مجموعهٔ نقاط یک

نقطه می‌گویند؛ حالا عضوهای این مجموعه هر چه می‌خواهد باشد. به عبارت دیگر، نقطه‌ها همان اعضای مجموعهٔ

$\mathbb{P}$ و خط‌ها همان اعضاء مجموعهٔ $\mathbb{L}$ هستند.

؟ در بالا اشاره‌ای به دستگاه اصل موضوعی گردید. اصولاً دستگاه اصل موضوعی چیست؟

یکی از مهم‌ترین اهداف کتاب حاضر، توضیح و روشن کردن دستگاه اصل موضوعی و روش اصل موضوعی برای خواننده است. اگر بخواهیم خیلی ساده بگوییم؛ در روش اصل موضوعی، با تعدادی مفاهیم تعریف نشده و اصل شروع کرده و با استفاده از منطق نتایجی از این اصل موضوع‌ها گرفته می‌شود. گفته می‌شود که انگیزه اصلی اقلیدس از نوشتن کتاب **اصول**، اثبات دقیق قضیه فیثاغورس بوده است. بنابراین اقلیدس شروع کرد به ایجاد یک دستگاه اصل موضوعی.

اقلیدس متوجه شد که می‌توان گزاره‌ها را براساس یک سیر دقیق به دنبال هم چید به طوری که اثبات درستی هر گزاره فقط به گزاره‌های اثبات شده قبلی وابسته باشد. او دریافت که امکان ندارد که همه گزاره‌ها ثابت شوند و تلاش برای اثبات همه گزاره‌ها محکوم به دور باطل است. اقلیدس فهمید که باید چند گزاره را بدون اثبات بپذیرد. به این ترتیب، هندسه اصل موضوعی متولد شد. معروف است که اقلیدس فقط کار جمع‌آوری دانش هندسه و نظریه اعداد را که تا آن موقع مطرح شده بود را انجام داده است و این مطالب را خودش کشف نکرده است. اما شاهکار اقلیدس آن بود که برای اولین بار روش اصل موضوعی را به کار برده است.

؟ این اصول موضوعه چگونه انتخاب می‌شوند؟

در اوایل پیدایش هندسه، تصور از اصل موضوع این بود که یک اصل موضوع گزاره‌ای است که وضعیتی بدیهی و درست از جهان را بیان می‌کند. یعنی اقلیدس به اطراف خود نگاه می‌کرد و براساس تجربه این گزاره‌ها را می‌پذیرفت. در دیدگاه جدید، یک اصل موضوع لزوماً واقعیتی را در مورد جهان پیرامونی بیان نمی‌کند.

؟ آیا می‌خواهید بگویید که انتخاب گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را می‌پذیریم، کاملاً دلخواه و اختیاری است؟

هر دستگاه اصل موضوعی برای توصیف هر چه دقیق‌تر یک وضعیت مورد نظر ساخته می‌شود؛ مثلاً در هندسه اصل موضوعی، هدف، توصیف هندسه محیط پیرامونی است. بنابراین اصل موضوع‌ها را گزاره‌های می‌گیرند که برای این کار مناسب هستند و با انتخاب آن‌ها یک نظریه غنی از قضیه‌ها به دست آید. هم‌چنین، انتخاب اصل موضوع‌ها باید به گونه‌ای باشد که منجر به تناقض نشود. اجازه دهید یک اصل موضوع را در نظر بگیریم:

به ازای هر دو نقطه متمایز فقط یک خط وجود دارد که شامل این دو نقطه است.

؟ چگونه می‌توان توجیه کرد که این اصل درست است؟

ما ادعا نمی‌کنیم که یک اصل گزاره‌ای درست است؛ بنابراین نیازی به ارائه و توجیه درستی اصل‌ها نداریم.

قضیه‌ها چگونه؟ آیا قضیه‌ها هم گزاره‌هایی درست نیستند؟

قضیه‌ها را به این دلیل قضیه می‌گوییم که نتیجه منطقی اصل‌ها یا قضیه‌های ثابت شده قبلی هستند. قضیه‌ها در مدل‌ها گزاره‌هایی درست هستند. اجازه دهید با یک مثال واقعی پاسخ سؤال‌های شما را بدهیم. یک مونوئید^۱ عبارت است از یک مجموعه G که در آن یک عمل دوتایی $*$ تعریف شده است و در اصل‌های زیر صدق می‌کند.

- اصل ۱** عمل $*$ شرکت‌پذیر است؛ یعنی برای هر $a, b, c \in G$ ، $a * (b * c) = (a * b) * c$
- اصل ۲** عضوی چون e در G (که عضو همانی نامیده می‌شود) وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in G$ داریم:
- $$a * e = e * a = a$$

بعد قضیه‌هایی ثابت می‌شوند که یکی از آن‌ها را در زیر می‌بینید.

قضیه ۱-۱ در یک مونوئید، عضو همانی یکتا است.

به سادگی، ثابت می‌شود که مجموعه اعداد صحیح با عمل جمع، یعنی $(\mathbb{Z}, +)$ در اصل‌های مونوئید صدق می‌کند. بنابراین $(\mathbb{Z}, +)$ یک مدل برای اصل‌های مونوئید است. حالا هر مثالی از مونوئید که ارائه دهیم، این قضیه‌ها در آن مثال‌ها (به زبان هندسه، در آن مدل‌ها) گزاره‌هایی درست هستند. یکی از ویژگی‌های مهم که در یک دستگاه اصل موضوعی رعایت می‌شود آن است که اصل‌ها از یکدیگر **مستقل** باشند؛ یعنی یک اصل از اصل‌های دیگر نتیجه نشود. به عبارت دیگر، اصل‌ها در آن دستگاه قضیه نباشند.

چگونه نشان می‌دهیم اصل‌های یک دستگاه اصل موضوعی مستقل هستند؟

اجازه دهید در مثال دستگاه اصل موضوعی مونوئید نشان دهیم اصل‌های آن مستقل هستند. مجموعه اعداد طبیعی با عمل جمع در اصل ۱ صدق می‌کند ولی در اصل ۲ صدق نمی‌کند. بنابراین اصل ۲ نتیجه اصل ۱ نیست.

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	a
b	b	b	e

مجموعه $\{e, a, b\}$ با عمل $*$ که با جدول روبه‌رو تعریف شده را در نظر بگیرید. این مجموعه با عمل $*$ در اصل ۲ صدق می‌کند ولی در اصل ۱ صدق نمی‌کند. بنابراین اصل ۱ نتیجه اصل ۲ نیست؛ در نتیجه، اصل‌های این دستگاه اصل موضوعی مستقل هستند.

■ خلاصه آن چه در بخش یک خواندیم

- در این بخش با اصطلاحات «هندسه خنثی»، «مدل در هندسه»، «هندسه اقلیدسی»، «اصل پنجم اقلیدس»، «اصل توازی پلی فیر»، «تعریف نشده‌ها» و «اصل موضوع» آشنا شدیم. به علاوه، دیدیم که: هندسه تشکیل شده است از دو مجموعه، یکی مجموعه نقاط ($\mathbb{P}$) و دیگری مجموعه خط‌ها ($\mathbb{L}$) که در تعدادی اصل موضوع صدق می‌کنند.
- یک دستگاه اصل موضوعی تشکیل شده است از:
 - الف) مجموعه‌ای از اصطلاحات تعریف نشده،
 - ب) تعدادی اصطلاح تعریف شده،
 - پ) اصل موضوع‌ها،
 - ت) یک دستگاه منطقی،
 - ث) قضیه‌ها
- هندسه اقلیدسی همان هندسه‌ای است که در کتاب «اصول» اقلیدس آورده شده است. هندسه اقلیدسی نخستین نمونه از یک دستگاه اصل موضوعی است که در تاریخ مطرح شده است.
- اصل موضوع‌ها برای ما حقایق بدیهی نیستند، بلکه گزاره‌هایی مفیدی هستند که وضعیت مورد نظر ما را توصیف می‌کنند و هندسه‌ها با آن‌ها شروع می‌شوند.
- اصل موضوع‌ها باید طوری انتخاب شوند که منجر به تناقض نشوند.
- مدل‌ها برای واقعی شدن مفروضات و اصول و اشیاء هندسه (نقطه، خط، پاره خط، نیم خط، زاویه، مثلث و نظایر آن) ارائه می‌شوند و هر هندسه‌ای باید الزاماً مدلی داشته باشد؛ در غیر این صورت حتماً ناسازگار و بیهوده خواهد بود.
- مدل‌ها از این نظر مهم‌اند که نشان می‌دهند یک تئوری واقعاً در مورد چیزی صحبت می‌کند.
- در هندسه، اصل‌ها را ثابت نمی‌کنند، بلکه آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیرند. اما در یک مدل، باید نشان دهیم این اصل‌ها گزاره‌هایی درست‌اند.
- مثالی از یک مثلث متساوی‌الاضلاع، در یک هندسه نااقلیدسی، دیدیم که اندازه هر زاویه آن 60° درجه نبود و مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن مثلث برابر $84/3^\circ$ بود.

بخش ۲

هندسه را چگونه آغاز می کنند؟

هر هندسه از دو مجموعه تشکیل می شود؛ یکی **مجموعه نقاط** و دیگری **مجموعه خطها**. مجموعه نقاط را با $\mathbb{P}$ و مجموعه خطها را با $\mathbb{L}$ نشان می دهیم.

ارتباط بین مجموعه نقاط و مجموعه خطها چگونه است؟

هر عضو مجموعه $\mathbb{L}$ را یک خط می نامیم و هر خط یک زیرمجموعه از $\mathbb{P}$ است.

آیا خطها زیرمجموعه های خاصی از نقاط هستند؛ یا هر زیرمجموعه $\mathbb{P}$ می تواند یک خط باشد؟ به عبارت دیگر، آیا هر مجموعه نقطای می تواند یک خط را تشکیل دهد؟

به نظر شما، یک خط می تواند فقط یک نقطه داشته باشد؟ یا یک خط می تواند فقط از دو نقطه تشکیل شده باشد؟

از معلومات هندسه ای که خوانده ایم، واضح است که یک خط بی شمار نقطه دارد؟

اما با توصیفی که فعلاً از خطها داده ایم هیچ نتیجه ای در مورد ویژگی های یک خط نمی توان گرفت؛ غیر از آن که یک خط یک زیرمجموعه $\mathbb{P}$ است. این که خطها چه ویژگی هایی باید داشته باشند، بخش مهمی از کارهایی است که در ساختن بنیان هندسه باید انجام داد. ویژگی هایی که یک خط باید داشته باشد توسط اصل موضوعها داده می شود. مثلاً نمی خواهیم خطهای ما فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد؛ بنابراین اصلی به صورت «هر خط حداقل دو نقطه دارد.» را در هندسه مطرح می کنیم. ساده ترین هندسه، هندسه ای است که در آن سه اصل زیر برقرار باشد.

(۱) از هر دو نقطه حداقل یک خط می گذرد.

(۲) هر خط حداقل دو نقطه متمایز دارد.

(۳) سه نقطه متمایز وجود دارد که هر سه روی یک خط قرار ندارند.

هندسه ای که مجموعه نقاط و مجموعه خطهای آن ویژگی های بیان شده در اصل های بالا را داشته باشد، یک هندسه محض می نامیم.

تعریف یک هندسه محض $\{\mathbb{P}, \mathbb{L}\}$ ، متشکل از یک مجموعه ناتهی $\mathbb{P}$ ، به نام مجموعه نقاط و یک مجموعه $\mathbb{L}$ ، به

نام مجموعه خطها است که عناصر $\mathbb{L}$ زیرمجموعه هایی از $\mathbb{P}$ هستند به طوری که در اصل های زیر صدق کنند.

(۱) از هر دو نقطه حداقل یک خط بگذرد؛ یعنی $\forall A, B \in \mathbb{P} \exists l \in \mathbb{L} \quad A, B \in l$

(۲) هر خط حداقل شامل دو نقطه متمایز باشد؛ یعنی $\forall l \in \mathbb{L} \exists A, B \in \mathbb{P} \quad A \neq B, A, B \in l$

(۳) سه نقطه متمایز وجود دارد که هر سه روی یک خط قرار ندارند.

فرض کنید A یک نقطه و l یک خط است. در زبان هندسه، جمله « $A \in l$ » به صورت «نقطه A بر خط l واقع است.» یا به شکل «خط l از نقطه A می گذرد.» و همچنین، « $A \notin l$ » به صورت « A خارج خط l قرار دارد.» بیان می شوند.

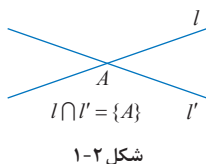
؟ به نظر می رسد که تعریف هندسه محض با نمادهای منطقی کمکی به فهم آن نمی کند.

بله، ولی این کار برای دقت در بیان مفید است و این که حواسمان جمع شود که در بحث هایمان از فرض های اضافه استفاده نکنیم. معمولاً ریاضی دانان و نویسندگان کتاب های ریاضی سعی می کنند که کم تر از نمادهای منطقی استفاده کنند. در این کتاب نیز ما به ندرت نمادهای منطقی را استفاده می کنیم.

؟ از این سه اصل موضوع چه نتایجی می توان گرفت؟ مثلاً آیا می توان ثابت کرد که دو خط متمایز متقاطع همدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند؟

شما ابتدا باید دو خط متقاطع را تعریف کنید. در هر علمی، باید مطمئن بود که همه در معنی اصطلاحات به کار رفته اتفاق نظر دارند. تعریف ها در ریاضی کمک می کند که معنی اصطلاحات برای همه یکسان باشد.

؟ مقصود من از دو خط متقاطع، دو خط متمایزی است که اشتراکشان تهی نباشند؛ یعنی دو خط متمایز l و l' را متقاطع می نامیم هرگاه $l \cap l' \neq \emptyset$.



شکل ۱-۲

با توجه به شکل ۱-۲ واضح است که هر دو خط متقاطع فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند. اما می خواهیم بدانیم که از این سه اصل هندسه محض، چگونه این مطلب ثابت می شود.

از کجا می دانید که خط ها در هندسه به صورت شکل ۱-۲ هستند؟

؟ این شکل با استفاده از یک خط کش به دست می آید. به این صورت که با کشیدن یک مداد روی یک لبه خط کش خط ها را رسم می کنیم.

همان طور که قبلاً اشاره شد، این کاری که شما انجام دادید و خط ها را با شکل هایی مانند ۱-۲ معرفی کردید، فقط ارائه یک مدل برای هندسه است.

دیدیم که هر هندسه از یک مجموعه نقاط، $\mathbb{P}$ و یک مجموعه خط ها، $\mathbb{L}$ تشکیل یافته است. ما در مورد ماهیت اعضای مجموعه $\mathbb{P}$ ، یعنی نقاط و همچنین اعضای مجموعه $\mathbb{L}$ ، یعنی خط ها، صحبتی نمی کنیم؛ فقط با آوردن اصل هایی ویژگی های آن ها را بیان می کنیم. حالا اگر مثالی مطرح کنید که در آن دقیقاً اعضای مجموعه های $\mathbb{P}$ و $\mathbb{L}$ مشخص شده باشند و در آن اصول صدق کنند، شما یک مدل برای این هندسه ارائه کرده اید.

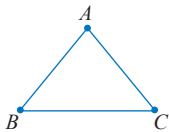
؟ آیا مجموعه ای مانند $\{A, B, C\}$ می تواند مجموعه نقاط یک هندسه محض باشد؟

چرا که نه! شما می توانید مدلی از هندسه محض ارائه دهید که مجموعه نقاط آن $\mathbb{P} = \{A, B, C\}$ باشد. برای این کار، باید مجموعه خط ها، یعنی $\mathbb{L}$ را طوری بسازیم که در آن سه اصل صدق کنند. یعنی، هر دو عضو $\mathbb{P}$ را که در نظر

بگیریم، روی یک خط باشند. به علاوه، خط‌ها حداقل دو عضوی باشند و هیچ خطی همه نقاط را دربر نداشته باشد. توجه داریم که هر خط یک زیرمجموعه از مجموعه نقاط است. مجموعه نقاط $\mathbb{P} = \{A, B, C\}$ دارای هشت زیرمجموعه است، که بنابر اصل ۲، آن‌هایی می‌توانند خط باشند که حداقل دو عضو داشته باشد. این زیرمجموعه‌ها عبارتند از:

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}$$

اکنون این زیرمجموعه‌ها را می‌توان خط‌های این هندسه در نظر گرفت، زیرا در اصل ۱ صدق می‌کنند. بنابر اصل ۳، مجموعه $\{A, B, C\}$ را نمی‌توانیم به عنوان خط بپذیریم، زیرا همه نقاط را دربر دارد. بقیه مجموعه‌ها به عنوان خط، هر سه اصل هندسه محض را برآورده می‌کنند. بنابراین به مدل زیر از هندسه محض می‌رسیم.



شکل ۲-۲

$$\text{مجموعه نقاط} = \mathbb{P} = \{A, B, C\}$$

$$\text{مجموعه خط‌ها} = \mathbb{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$$

گاهی این مدل را به صورت شکل ۲-۲ نمایش می‌دهند.

توجه کنید نقاط روی ضلع‌های این مثلث، نقاط این مدل نیستند.

به هر حال، چگونه از اصول هندسه محض می‌توان نتیجه گرفت که دو خط متقاطع همدیگر را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند؟



یکی از کاربردهای جالب داشتن مدل‌های متعدد برای یک هندسه آن است که اگر بخواهیم بدانیم آیا یک گزاره داده شده را می‌توان از اصل‌های آن هندسه نتیجه گرفت یا نه، کافی است مدل‌های مختلفی از آن هندسه را در نظر بگیریم. دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: این گزاره در یک مدل درست است ولی در مدل دیگر درست نیست؛ در این صورت نتیجه می‌گیریم که این گزاره در آن هندسه قابل اثبات نیست و همچنین نقیض آن نیز قابل اثبات نیست.

حالت دوم: این گزاره در چند مدل از این هندسه درست است؛ در این صورت، بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان اثباتی برای درستی این گزاره، با استفاده از اصول آن هندسه، پیدا کرد یا نه.

فرض کنید $\ell_1 = \{A, B\}$ ، خط $\ell_2 = \{A, C\}$ و $\ell_3 = \{B, C\}$ خط ℓ_3 . در این صورت گزاره مورد نظر شما، در مدل سه نقطه‌ای بالا درست است. زیرا $\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$ ، $\ell_1 \cap \ell_3 = \{B\}$ و $\ell_2 \cap \ell_3 = \{C\}$.

مثال ۱-۱: اکنون مدل دیگری به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\text{مجموعه نقاط} = \mathbb{P} = \{A, B, C, D\}$$

$$\text{مجموعه خط‌ها} = \mathbb{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{B, C, D\}, \{A, C, D\}\}$$

به سادگی می‌توان دید که مجموعه نقاط و مجموعه خط‌های بالا در اصل‌های هندسه محض صدق می‌کنند. در این مدل، دو خط متمایز $\ell_1 = \{B, C, D\}$ و $\ell_2 = \{A, C, D\}$ در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؛ یعنی $\ell_1 \cap \ell_2 = \{C, D\}$. این دو مدل نشان می‌دهد که گزاره زیر در هندسه محض قابل اثبات نیست.

«در هندسه محض، هر دو خط متمایز متقاطع فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.»

حالا چه باید کرد تا اینکه، در یک هندسه، دو خط متقاطع فقط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند؟

اگر به مدل داده شده در مثال ۱-۱ نگاه کنید، متوجه می‌شویم که از دو نقطه C و D بیش از یک خط گذشته است. بنابراین کافی است اصلی اضافه کنیم که از دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد. به این ترتیب، هندسه‌ای خواهیم داشت که آن را **هندسه وقوع^۱** می‌نامیم، که در زیر تعریف آن آمده است.

تعریف فرض کنید $\mathbb{P}$ مجموعه نقاط و $\mathbb{L}$ مجموعه خط‌ها باشد. دوگانه $\{\mathbb{L}, \mathbb{P}\}$ یک **هندسه وقوع** نامیده می‌شود

هرگاه در اصل‌های زیر صدق کند:

اصل ۱. از هر دو نقطه متمایز یک و فقط یک خط می‌گذرد.

اصل ۲. هر خط حداقل دو نقطه متمایز دارد.

اصل ۳. سه نقطه متمایز وجود دارد به طوری که هر سه روی یک خط نیستند.

توضیحاتی در مورد تعریف هندسه وقوع

الف: اصل ۱ بیانگر آن است که اگر دو نقطه متمایز A و B در نظر بگیریم، خطی مانند l وجود دارد که از A و B می‌گذرد و بیش از یک خط وجود ندارد. در این صورت، خط l که از A و B می‌گذرد، با نماد $\overleftrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی $l = \overleftrightarrow{AB}$.
ب: اصل دوم می‌گوید خط‌های یک نقطه‌ای نداریم. توجه کنید از این اصل هانمی توان نتیجه گرفت که یک خط بی‌شمار نقطه دارد. اگر می‌خواهید خط‌هایتان بی‌شمار نقطه داشته باشند، نیاز به اصلی داریم که بعداً آن را معرفی خواهیم کرد.
پ: از اصل ۳ نتیجه می‌شود که همه نقاط هندسه وقوع روی یک خط نیستند؛ و در این هندسه، حداقل سه خط وجود دارد.

اکنون آماده‌ایم که نشان دهیم در هندسه وقوع (هندسه‌ای که در سه اصل بالا صدق می‌کند)، دو خط متقاطع متمایز فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. گزاره زیر را یک قضیه می‌نامیم؛ زیرا درستی گزاره را بدون اثبات نپذیرفته‌ایم و برای آن اثباتی ارائه شده است.

قضیه ۱-۲ هر دو خط متقاطع و متمایز فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؛ یعنی اگر l_1 و l_2 دو خط متمایز

باشند به طوری که $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ ، آن‌گاه نقطه‌ای مانند A وجود دارد به طوری که $l_1 \cap l_2 = \{A\}$.

اثبات (برهان خلف) فرض کنید $l_1 \cap l_2$ بیش از یک عضو داشته باشد؛ یعنی نقاط متمایز P و Q وجود داشته باشند به طوری که $P \in l_1 \cap l_2$ و $Q \in l_1 \cap l_2$. از $P \in l_1$ و $P \in l_2$ نتیجه می‌شود $P \in l_1 \cap l_2$. از $Q \in l_1$ و $Q \in l_2$ نتیجه می‌شود $Q \in l_1 \cap l_2$. پس، $\overleftrightarrow{PQ} = l_1$ و $\overleftrightarrow{PQ} = l_2$. در نتیجه $l_1 = l_2 = \overleftrightarrow{PQ}$ که خلاف فرض است؛ زیرا l_1 و l_2 دو خط متمایز بودند. ■

۱. یکی از معانی کلمه «وقوع»، «قرار داشتن بر» است. در هندسه وقوع فقط اصل‌هایی مطرح می‌شوند که در مورد قرار داشتن نقطه‌ها بر یک خط می‌باشد.

در هندسه‌ای که در سه اصل بالا صدق می‌کند (هندسه وقوع)، چگونه می‌توان نشان داد که از هر نقطه خارج یک

خط l فقط یک خط به موازات خط l می‌توان رسم کرد؟

دو خط موازی را شما چگونه تعریف می‌کنید؟

دو خط l_1 و l_2 را موازی می‌گوییم هرگاه همدیگر را قطع نکنند.

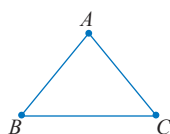
در حالتی که $l_1 = l_2$ ، آیا دو خط l_1 و l_2 را موازی می‌گویید؟

به نظر من، چون اشتراک این دو خط تهی نیست، در این حالت l_1 و l_2 موازی نیستند.

اما در این کتاب، اگر $l_1 = l_2$ خط‌های l_1 و l_2 را موازی در نظر می‌گیریم، بنابراین دو خط موازی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف در یک هندسه وقوع، دو خط l_1 و l_2 را موازی می‌گوییم و می‌نویسیم $l_1 \parallel l_2$ هرگاه $l_1 = l_2$ یا $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.

همان‌طور که قبلاً اشاره شده، برای بررسی اثبات‌پذیری این گزاره، ابتدا درستی یا نادرستی این گزاره را در مدل‌های هندسه وقوع بررسی می‌کنیم.



شکل ۳-۲

ابتدا مدلی را در نظر می‌گیریم که مجموعه نقاط آن $\mathbb{P} = \{A, B, C\}$ و مجموعه خط‌های

آن $\mathbb{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$ است (شکل ۲-۳).

این یک مدل برای هندسه وقوع است. اکنون نقطه A و خط $l = \{B, C\}$ را در نظر بگیرید.

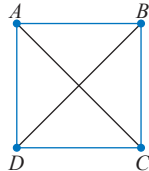
این نقطه خارج خط $\overrightarrow{BC}$ است، زیرا $A \notin \{B, C\}$. دو خط از A می‌گذرد که عبارت‌اند از

$l_1 = \{A, C\}$ و $l_2 = \{A, B\}$. هر دو این خط‌ها خط $l = \{B, C\}$ را قطع می‌کنند. بنابراین در این مدل، از یک نقطه

خارج خط l هیچ خطی به موازات خط l نمی‌توان رسم کرد.

آیا می‌توان نتیجه گرفت که گزاره «از هر نقطه P خارج خط l خطی به موازات خط l وجود دارد» یک گزاره

نادرست در هندسه وقوع است؟



شکل ۴-۲

خیر. تنها نتیجه‌ای که می‌توان گرفت، آن است که این گزاره از اصل‌های هندسه وقوع نتیجه

نمی‌شود. شما می‌توانید مدل دیگری از هندسه وقوع ارائه دهید که گزاره بالا در آن درست

باشد. مثلاً مدلی را در نظر بگیرید که مجموعه نقاط آن $\mathbb{P} = \{A, B, C, D\}$ و مجموعه خط‌های

آن تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{P}$ است؛ یعنی $\mathbb{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.

در این مدل، از هر نقطه خارج یک خط l فقط یک خط به موازات خط l می‌توان رسم کرد. مثلاً نقطه A و خط

$l = \overrightarrow{BD}$ را در نظر بگیرید. واضح است که نقطه A خارج خط $l = \overrightarrow{BD}$ است، زیرا $A \notin \{B, D\}$. از نقطه A سه خط

$l_1 = \{A, B\}$ ، $l_2 = \{A, C\}$ و $l_3 = \{A, D\}$ می‌گذرد؛ که فقط $\{A, C\}$ موازی خط $l = \overrightarrow{BD}$ است. این مطلب، برای هر نقطه و هر

خط در این مدل برقرار است (شکل ۲-۴).

آیا در این مدل می‌توان نتیجه گرفت که خط $\overrightarrow{AB}$ بر خط $\overrightarrow{AD}$ عمود است؟

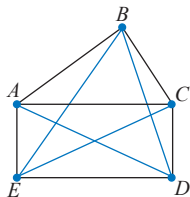
احتمالاً این نمودار شما را به اشتباه انداخته است. این نمودارها گرچه در بسیاری از موارد در فهم هندسه به ما کمک

می‌کند؛ اما می‌تواند گمراه‌کننده هم باشد. توجه کنید که خط $\overrightarrow{AB}$ مجموعه دو عضوی $\{A, B\}$ است و خط $\overrightarrow{AD}$

مجموعه دو عضوی $\{A, D\}$ است. در این کتاب، باید ذهن خودتان را تربیت کنید که تجربه قبلی خودتان درباره هندسه

را موقتاً کنار بگذارید. این هندسه هنوز آن قدر غنی نیست که بتوانیم عمود بودن را در آن تعریف کنیم. باید قبلاً نیم خط، زاویه، اندازه زاویه تعریف شوند تا بتوان عمود بودن را تعریف کرد. هنوز راه زیادی تا آن جا مانده است.

در تعریف شما از دو خط موازی، دیدیم که هر خط l با خودش موازی است؛ یعنی $l \parallel l$. بنابراین رابطه توازی خاصیت بازتابی دارد. خاصیت تقارنی رابطه توازی هم واضح است؛ یعنی اگر $l_1 \parallel l_2$ آن گاه $l_2 \parallel l_1$. چگونه می‌توان از اصول هندسه وقوع نتیجه گرفت که رابطه توازی خاصیت تراگذاری دارد؟ یعنی چگونه نشان دهیم از $l_1 \parallel l_2$ و $l_2 \parallel l_3$ نتیجه می‌شود که $l_1 \parallel l_3$ ؟



شکل ۵-۲

اجازه دهید خاصیت تراگذاری رابطه توازی را در مدل داده شده در شکل ۵-۲ بررسی کنیم. مجموعه نقاط این مدل $\mathbb{P} = \{A, B, C, D, E\}$ و مجموعه خط‌های آن را تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{P}$ می‌گیریم (شکل ۵-۲). این مدل در تمام اصل‌های هندسه وقوع صدق می‌کند. در این مدل، خط‌های l_1 ، l_2 و l_3 را به صورت $l_1 = \{A, B\}$ ، $l_2 = \{C, D\}$ و $l_3 = \{A, E\}$ در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنید که $l_1 \parallel l_2$ و $l_2 \parallel l_3$ ، اما $l_1 \not\parallel l_3$.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که از اصول هندسه وقوع نمی‌توان نتیجه گرفت که رابطه توازی خاصیت تراگذاری دارد.

■ خلاصه آن‌چه در بخش ۲ خواندیم

- در بخش ۲، اصطلاحات هندسه محض، هندسه وقوع و توازی را تعریف کردیم.
- هندسه محض تشکیل شده از یک مجموعه $\mathbb{P}$ (مجموعه نقاط) و یک مجموعه $\mathbb{L}$ (مجموعه خط‌ها) که در اصل‌های زیر صدق می‌کنند.
 - (الف) از هر دو نقطه حداقل یک خط می‌گذرد.
 - (ب) هر خط حداقل شامل دو نقطه متمایز است.
 - (پ) سه نقطه متمایز وجود دارد به طوری که هر سه روی یک خط نیستند.
- هندسه وقوع تشکیل شده از یک مجموعه $\mathbb{P}$ و یک مجموعه $\mathbb{L}$ که در اصل‌های زیر صدق می‌کنند.
 - (الف) از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط می‌گذرد.
 - (ب) هر خط حداقل دو نقطه متمایز دارد.
 - (پ) سه نقطه متمایز وجود دارد به طوری که هر سه روی یک خط نیستند.
- در هندسه وقوع، از دو نقطه متمایز A و B فقط یک خط می‌گذرد. این خط را با نماد $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم.
- یک مجموعه نقاط S را هم خط می‌نامیم، هرگاه خطی مانند l وجود داشته باشد، به طوری که $S \subseteq l$.
- دو خط متمایز l_1 و l_2 متقاطع اند، هرگاه $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$.
- در یک هندسه محض، دو خط l_1 و l_2 را موازی می‌گوییم و می‌نویسیم $l_1 \parallel l_2$ هرگاه $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ یا $l_1 = l_2$.
- قضیه ۱-۲: در هندسه وقوع، هر دو خط متقاطع فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین، در هندسه وقوع، هر دو خط یا موازی اند یا فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.
- از اصول هندسه وقوع نمی‌توان نتیجه گرفت که رابطه توازی خاصیت تراگذاری دارد.

بخش ۲۳

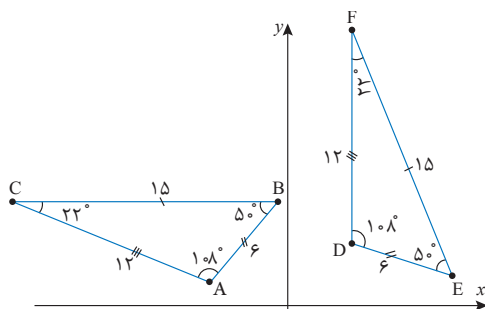
هندسه خشتی

(هندسه بی طرف نسبت به اصل توازی)

اکنون به مرحله‌ای مهم در ساختن هندسه (به صورت اصل موضوعی) رسیده ایم. زیرا می‌خواهیم آخرین گام قبل از پذیرفتن یا نپذیرفتن اصل توازی اقلیدسی را برداریم. در این بخش، هندسه خشتی (هندسه قبل از اصل توازی) را معرفی می‌کنیم؛ هندسه‌ای که نسبت به اصل توازی بی طرف است. بنابراین برخی از مدل‌های این هندسه در اصل توازی و برخی در اصل توازی هیپربولیک صدق می‌کنند. این بخش را با معرفی مفهوم اساسی هم‌نهشتی مثلث‌ها آغاز می‌کنیم.

هم‌نهشتی در مثلث‌ها

در شکل ۱-۲۳، دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ در مدل صفحه اقلیدسی داده شده‌اند. ملاحظه می‌کنید که $\overline{AB} \approx \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \approx \overline{EF}$ و $\overline{CA} \approx \overline{FD}$. همچنین، $\angle C \approx \angle F$ و $\angle B \approx \angle E$ ، $\angle A \approx \angle D$. ضلع‌های $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ را **دو ضلع**



شکل ۱-۲۳

نظیر در این دو مثلث می‌گوییم. به همین ترتیب، ضلع $\overline{BC}$ نظیر ضلع $\overline{EF}$ و ضلع $\overline{CA}$ از مثلث $\triangle ABC$ نظیر ضلع $\overline{FD}$ از مثلث $\triangle DEF$ است. در این صورت، می‌گوییم یک تناظر بین دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ برقرار شده است. در واقع، یک تابع دوسویی $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ به صورت $f(A) = D$ ، $f(B) = E$ و $f(C) = F$ بین رأس‌های این دو مثلث تعریف شده است.

آیا بین رأس‌های این دو مثلث فقط یک تناظر، تعریف‌شده به صورت بالا، وجود دارد؟

هر تابع دوسویی از $\{A, B, C\}$ به $\{D, E, F\}$ یک تناظر بین این دو مثلث نامیده می‌شود. از میان این تناظرها به آن‌هایی علاقه‌مندیم که منجر به هم‌نهشتی دو مثلث شوند. در زیر، هم‌نهشتی در مثلث‌ها را تعریف می‌کنیم.

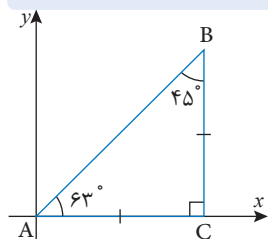
شکل ۲۳-۴

جالبتر از آن، مثلث متساوی الساقین شکل ۲۳-۵، در مدل مولتون، است. برخلاف مثلث متساوی الساقین شکل ۲۳-۴، با تناظر $A \leftrightarrow A$ ، $B \leftrightarrow C$ ، $C \leftrightarrow B$ ، مثلث ABC با مثلث ACB هم‌نهشت نیست، زیرا $\angle B \approx \angle C$. این مثلث متساوی الساقین، در مدل مولتون، فقط با تناظر همانی $A \leftrightarrow A$ ، $B \leftrightarrow B$ و $C \leftrightarrow C$ با خودش هم‌نهشت است.

مگر امکان دارد که در یک مثلث متساوی الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده هم‌نهشت نباشند؟

شما به گزاره‌ای اشاره می‌کنید که از اصل‌های هندسهٔ نقاله‌ای نتیجه نمی‌شود. در زیر، تعدادی از قضیه‌های آشنای هندسهٔ اقلیدسی را آورده‌ایم که از اصل‌های هندسهٔ نقاله‌ای نتیجه نمی‌شوند. در هندسه‌هایی که تا به حال خوانده‌ایم (یعنی در هندسهٔ نقاله‌ای) هیچ کدام از قضیه‌های زیر از اصول این هندسه‌ها نتیجه نمی‌شوند.

(۱) در هر مثلث متساوی الساقین، دو زاویهٔ مجاور به قاعده هم‌نهشت‌اند.



شکل ۶-۲۳

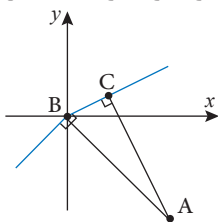
مثال نقض: در مدل مولتون، مثلث ABC با رأس‌های $A = (9, 0)$ ، $B = (1, 1)$ و $C = (1, 0)$ متساوی الساقین است ولی $m(\angle A) = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} = 63^\circ$ و $m(\angle C) = 90^\circ$ و $m(\angle B) = 45^\circ$.

(۲) هر زاویهٔ خارجی یک مثلث از هر یک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

(۳) از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، فقط یک خط عمود بر آن خط وجود دارد.

(۴) هر مثلث قائم‌الزاویه دقیقاً دو زاویهٔ حاده دارد.

مثال نقض: در هندسهٔ مولتون، سه نقطهٔ $A = (2, -2)$ ، $B = (9, 0)$ و $C = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ را در نظر بگیرید. از نقطهٔ A، دو



شکل ۷-۲۳

عمود بر خط $\overleftrightarrow{BC}$ وجود دارد^۱ (مثال نقض برای گزارهٔ ۲).

در مثلث ABC ، زاویهٔ خارجی رأس B از یکی از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش، زاویهٔ $\angle C$ ، بزرگ‌تر نیست، زیرا هر دو زاویه قائمه‌اند، (مثال نقض برای گزارهٔ ۳). مثلث ABC ، در همان شکل ۲۳-۷، یک مثلث قائم‌الزاویه است که فقط یک زاویهٔ حاده دارد (مثال نقض برای گزارهٔ ۴).

(۵) اگر دو ضلع و زاویهٔ بین از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ بین از مثلث دیگر هم‌نهشت باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

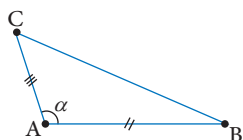
(۶) اگر سه ضلع مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر هم‌نهشت باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱. این مسأله در مثال ۱۲۴ به طور دقیق بررسی شده است.

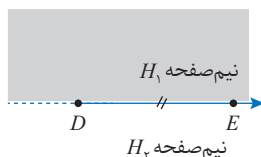
فکر نمی‌کنم برای دو گزاره ۵ و ۶ مثال‌های نقضی بتوان یافت؟

اجازه دهید دو مثلث بسازیم که دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از دو مثلث هم‌نهشت باشند. برای این کار، از یک مثلث داده شده $\triangle ABC$ شروع می‌کنیم (شکل ۸-۲۳) و مثلث $\triangle DEF$ را به صورت زیر می‌سازیم:

(الف) یک نیم خط $\overrightarrow{DX}$ رسم می‌کنیم و نقطه E را روی این نیم خط طوری می‌گیریم که $\overline{DE} \cong \overline{AB}$ (شکل ۹-۲۳).

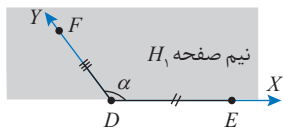


شکل ۸-۲۳



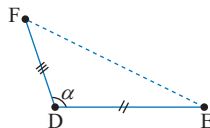
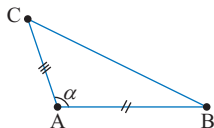
شکل ۹-۲۳

(ب) حال در نیم صفحه H_1 از خط $\overrightarrow{DX}$ نیم خط منحصر به فرد $\overrightarrow{DY}$ را (بنابر اصل ساختن زاویه) می‌توان ساخت به طوری که $\angle BAC \cong \angle EDY$. بعد، بنابر قضیه ساختن پاره خط، نقطه F را روی نیم خط $\overrightarrow{DY}$ طوری می‌گیریم که $\overline{DF} \cong \overline{AC}$ (شکل ۱۰-۲۳).



شکل ۱۰-۲۳

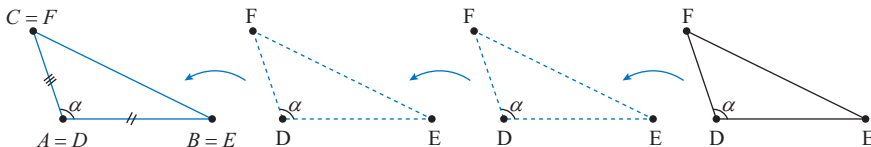
اکنون روشن است که اگر از F به E وصل کنیم، مثلث $\triangle DEF$ کاملاً بر مثلث $\triangle ABC$ منطبق می‌شود؛ بنابراین مثلث‌های $\triangle DEF$ و $\triangle ABC$ هم‌نهشت می‌شوند (شکل ۱۱-۲۳).



شکل ۱۱-۲۳

چرا ضلع $\overline{EF}$ از مثلث $\triangle DEF$ با ضلع $\overline{BC}$ از مثلث $\triangle ABC$ هم‌نهشت می‌شوند؟

مثلث $\triangle DEF$ را حرکت داده به طوری که ضلع $\overline{DE}$ از مثلث $\triangle DEF$ بر ضلع $\overline{AB}$ از مثلث $\triangle ABC$ منطبق شود و هر دو مثلث در یک طرف خط $\overleftrightarrow{AB}$ باشند. از این که $\angle A \cong \angle D$ ، نتیجه می‌شود که نیم خط $\overrightarrow{DF}$ روی نیم خط $\overrightarrow{AC}$ قرار می‌گیرد. چون $\overline{DF} \cong \overline{AC}$ ، بنابراین نقطه F بر C قرار می‌گیرد؛ در نتیجه، $\overline{EF} \cong \overline{BC}$ و دو مثلث کاملاً بر هم منطبق می‌شوند (شکل ۱۲-۲۳).



شکل ۱۲-۲۳

این همان استدلالی است که در کتاب «اصول» اقلیدس می‌توان یافت. در واقع، اقلیدس هم‌نهشتی دو مثلث را به همین شکل به کار می‌برد. (اقلیدس دو مثلث هم‌نهشت را دو مثلث مساوی می‌نامید).

مگر امکان دارد دو ضلع و زاویه بین آن‌ها در دو مثلث بر هم منطبق شوند ولی دو مثلث منطبق نشوند؟

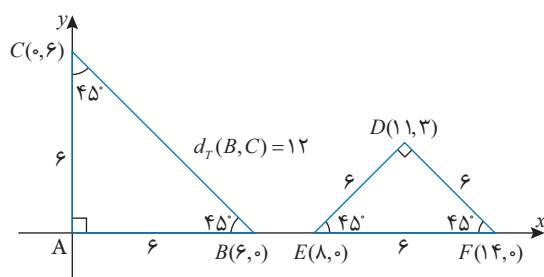
شما از اصطلاحات «حرکت» و «منطبق بودن» استفاده کردید که هیچ کدام در هندسه‌هایی که ما تعریف کردیم تعریف نشده‌اند. ما فقط اصطلاح هم‌نهشتی را در این کتاب به کار می‌بریم (اشکال کار شما این است که اقلیدسی فکر می‌کنید). ما با استفاده از اصولی که تا به حال خوانده‌ایم، نمی‌توانیم ثابت کنیم که دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ هم‌نهشت‌اند. در مثال زیر، نشان می‌دهیم که هم‌نهشتی مثلث‌ها در حالت دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض) از اصل‌های هندسه نقله‌ای نتیجه نمی‌شود.

مثال ۲۳-۱: در مدل دکارتی، با متریک تاکسی، مثلث $\triangle ABC$ را با رأس‌های $A = (۰, ۰)$ ، $B = (۶, ۰)$ و $C = (۰, ۶)$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌های $D = (۱, ۳)$ و $E = (۸, ۰)$ و $F = (۱۴, ۰)$ را مطابق شکل ۲۳-۱۳، در نظر می‌گیریم. با متریک تاکسی داریم:

$$ED = d_T(E, D) = ۳ + ۳ = ۶, \quad DF = d_T(D, F) = ۳ + ۳ = ۶$$

و زاویه‌های $\angle D$ و $\angle A$ هر دو قائمه‌اند. پس دو ضلع و زاویه بین در دو مثلث هم‌نهشتند. اکنون اندازه‌های دو ضلع $\overline{BC}$ و $\overline{EF}$ را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$BC = d_T(B, C) = ۶ + ۶ = ۱۲, \quad EF = d_T(E, F) = ۶ + ۰ = ۶$$



شکل ۲۳-۱۳

با این که دو ضلع و زاویه بین آن‌ها در دو مثلث هم‌نهشت‌اند؛ اما دو مثلث هم‌نهشت نیستند. جالب این جاست که زاویه‌های نظیر این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

به نظر می‌رسد که هندسه‌ای که در آن این قضیه‌ها برقرار نباشد، هندسه‌ای ضعیف و کسل‌کننده خواهد بود. به هندسه‌هایی که تا به حال داشتیم، چه چیزی باید اضافه کرد که این قضیه‌ها نتیجه شوند؟

جواب ساده است: اصل دو ضلع و زاویه بین یا معادل آن اصل دو زاویه و ضلع بین را باید به هندسه نقله‌ای اضافه کرد. در بالا دیدیم که اصل دو ضلع و زاویه بین از اصل‌های هندسه نقله‌ای نتیجه نمی‌شود. در این بخش و بخش‌های بعد، خواهیم دید که با پذیرفتن اصل دو ضلع و زاویه بین (یا معادل آن) می‌توان تمام گزاره‌های ۱ تا ۶ در بالا را نتیجه گرفت. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که با افزودن اصل ض ض ض به هندسه نقله‌ای هندسه‌ای غنی‌تر و هیجان‌انگیزتر خواهیم داشت. چون ما به این خاصیت نیاز داریم و نمی‌توان آن را از سایر اصل‌های هندسه نقله‌ای نتیجه گرفت، بنابراین

آن را به صورت یک اصل به هندسه نقاله‌ای اضافه می‌کنیم. این هندسه جدید (هندسه نقاله‌ای + اصل ض ز ض) را هندسه **خنثی** می‌نامند. گاهی این هندسه را **هندسه مطلق یا هندسه نتاری** هم می‌نامند.

تعریف به هر هندسه نقاله‌ای که در اصل دو ضلع و زاویه بین صدق کند، یک **هندسه خنثی** می‌گوییم. به عبارت دیگر، یک هندسه خنثی هندسه‌ای است که:

(۱) در اصول هندسه نقاله‌ای صدق می‌کند.

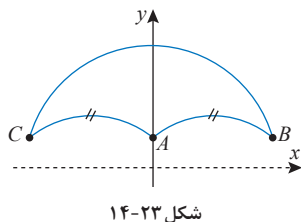
(۲) در اصل دو ضلع و زاویه بین صدق می‌کند؛ یعنی

اصل دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض) اگر در دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ داشته باشیم $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\angle B \cong \angle E$ و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، آن‌گاه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

در هندسه نقاله‌ای، فاصله بین نقاط روی خط‌های متفاوت و اندازه گیری زاویه‌ها در نقاط مختلف مستقل از یکدیگرند و رابطه خاصی با هم ندارند. اما اضافه کردن اصل دو ضلع و زاویه بین موجب می‌شود که این اندازه‌ها در نقاط مختلف به هم مربوط شوند و اندازه‌های پاره خط‌ها و زاویه‌ها در همه نقاط مانند هم باشند.

اولین سؤالی که مطرح می‌شود آن است که چگونه می‌توان از اصل ض ز ض حالت هم‌نهشتی ض ز را نتیجه گرفت.

اجازه دهید ابتدا قضیه زیر، معروف به قضیه پل الاغ‌ها، را ثابت کنیم. تعریف مثلث متساوی الساقین را در زیر ملاحظه می‌کنید.



شکل ۲۳-۱۴

مثلث متساوی الساقین در مدل نیم صفحه بالایی پوانکاره

تعریف در یک هندسه نقاله‌ای، یک مثلث را **متساوی الساقین** می‌گویند

هرگاه (حداقل) دو ضلع آن هم‌نهشت باشند (شکل ۲۳-۱۴). اگر $\triangle ABC$

یک مثلث متساوی الساقین باشد به طوری که $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، در این صورت

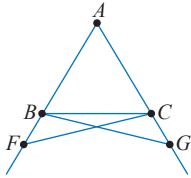
ضلع $\overline{BC}$ را **قاعده** و زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ را **زاویه‌های مجاور به**

قاعده می‌گوییم.

قضیه ۲۳-۲ (پل الاغ‌ها) در هر هندسه خنثی، زاویه‌های مجاور به قاعده یک مثلث متساوی الساقین هم‌نهشت‌اند.

اثبات (منسوب به پاپوس): فرض کنید $\triangle ABC$ مثلثی متساوی الساقین باشد به طوری که $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. با تناظر $f(A) = A$ ، $f(B) = C$ و $f(C) = B$ ، مثلث $\triangle ABC$ با مثلث $\triangle ACB$ به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت است. بنابراین $\angle B \cong \angle C$.

چرا به این قضیه پل الاغ‌ها می‌گویند؟



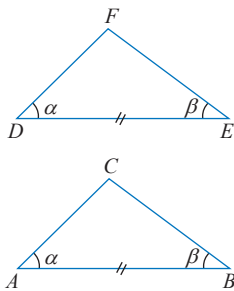
شکل ۲۳-۱۵

دلیل این نام‌گذاری آن است که در کتاب «اصول» اقلیدس اثباتی برای این قضیه آورده شده است که شکل آن شبیه پل است (شکل ۲۳-۱۵). علاوه بر این، به دلیل سخت بودن این اثبات، مدرسین ریاضی قرون وسطی، آن را پل الاغ‌ها نامیدند؛ چون ظاهراً از این طریق می‌توانستند دانشجویان ضعیف را از دانشجویان قوی جدا کنند. در واقع، الاغ را برای مخاطب قرار دادن دانشجویان ضعیف استفاده می‌کردند؛ زیرا دانشجویان ضعیف فراتر از این قضیه نمی‌توانستند بروند و خواندن هندسه را تا ابتدای این قضیه متوقف می‌کردند. اکنون می‌خواهیم عکس قضیه پل الاغ‌ها را ثابت کنیم.

اگر بخواهیم همان ایده اثبات قضیه پل الاغ‌ها را به کار ببریم، در دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ACB$ ، زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ با هم هم‌نهشت‌اند؛ به علاوه $\overline{BC} = \overline{CB}$. پس دو زاویه و ضلع بین در این دو مثلث هم‌نهشت‌اند، بنابراین نمی‌توان اصل دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض) را به کار برد. در نتیجه، باید بتوانیم قضیه دو زاویه و ضلع بین (ز ز ض) را اثبات کنیم.

قضیه ۲۳-۳ (حالت هم‌نهشتی اصل ز ز ض) فرض کنید در یک هندسه خنثی، تحت یک تناظر بین رأس‌های دو مثلث، دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین نظیر از مثلث دیگر هم‌نهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

فرض کنید $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ دو مثلثی باشند که در آن $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ و $\overline{AB} = \overline{DE}$ ، نشان می‌دهیم $\triangle ABC = \triangle DEF$.



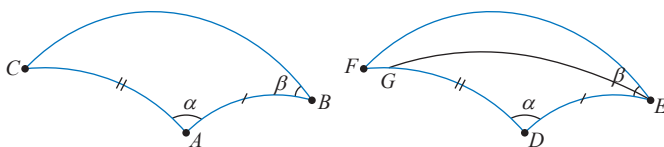
شکل ۲۳-۱۶

مثلث $\triangle ABC$ را حرکت می‌دهیم به طوری که ضلع $\overline{AB}$ بر ضلع هم‌نهشت آن $\overline{DE}$ قرار گیرد. چون $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ ، پس نیم خط $\overrightarrow{AC}$ بر $\overrightarrow{DE}$ و نیم خط $\overrightarrow{BC}$ بر $\overrightarrow{EF}$ منطبق می‌شود. در نتیجه، رأس‌های C و F برهم منطبق می‌شوند؛ پس دو مثلث برهم منطبق می‌شوند.

در این استدلال، شما دوباره همان ایده حرکت را استفاده کردید که در هندسه خنثی تعریف شده نیست. باید از ابزارهایی که تا به حال فراهم کرده‌ایم در اثبات این قضیه استفاده کنید.

اثبات قضیه ز ز ض (قضیه ۲۳-۳)

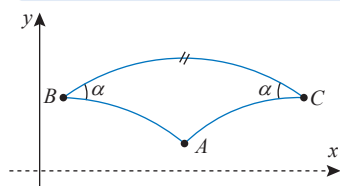
بنابر قضیه ساختن پاره خط، نقطه منحصر به فرد G روی نیم خط $\overrightarrow{DF}$ وجود دارد به طوری که $\overline{DG} = \overline{AC}$ در



شکل ۲۳-۱۷

این صورت، بنابر اصل ض ض، دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEG$ هم نهشت اند. از این هم نهشتی نتیجه می شود
 $\angle ABC \approx \angle DEG$ ، بنابراین $\angle DEG = \angle DEF$. نقطه های F و G در یک طرف خط $\overleftrightarrow{DE}$ واقع اند، در نتیجه،
 بنابر اصل ساختن زاویه $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$. بنابراین: $\{F\} = \overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} \cap \overrightarrow{DF} = \{G\}$. پس $F = G$. در نتیجه، $\triangle ABC \approx \triangle DEF$.
 اکنون آماده ایم که عکس قضیه پل الاغ ها را ثابت کنیم. در اثبات زیر خواهیم دید که چرا عکس قضیه پل الاغ ها
 بعد از قضیه ز ض ز آورده شده است.

قضیه ۲۳-۴ (عکس قضیه پل الاغ ها) در یک هندسه خنثی، اگر در یک مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\angle B = \angle C$
 آن گاه $\overline{AB} \approx \overline{AC}$.



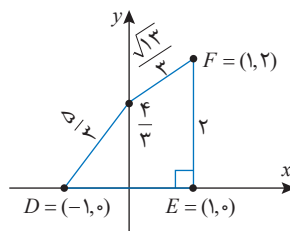
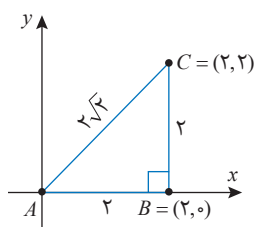
شکل ۱۸-۲۳

اثبات: با تناظر $A \leftrightarrow A$ و $B \leftrightarrow C$ و $C \leftrightarrow B$ ، مثلث $\triangle ABC$ با
 مثلث $\triangle ACB$ به حالت ض ض هم نهشت است، بنابراین $\overline{AB} \approx \overline{AC}$.

کدام یک از مدل های هندسه نقاله ای در اصول هندسه خنثی صدق می کنند؟

مثال ۲۳-۲: نشان دهید مدل مولتون در اصول هندسه خنثی صدق نمی کند.

حل: دیدیم که مدل مولتون یک هندسه نقاله ای است. اکنون نشان می دهیم که در این مدل دو مثلث وجود دارد
 که با یک تناظر رأس ها دو ضلع و زاویه بین از یکی با دو ضلع و زاویه نظیر از دیگری هم نهشت اند، ولی دو مثلث
 هم نهشت نیستند. برای این کار دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را در شکل ۱۹-۲۳ در نظر بگیرید. در این دو مثلث
 با تناظر $A \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow E$ و $C \leftrightarrow F$ ، داریم: $\overline{AB} \approx \overline{DE}$ ، $\angle B = \angle E$ و $\overline{BC} \approx \overline{EF}$. دو ضلع و زاویه بین
 نظیر در این دو مثلث هم نهشت اند، اما دو مثلث هم نهشت نیستند؛ زیرا ضلع سوم دو مثلث هم نهشت نیستند.



شکل ۱۹-۲۳

؟ به نظر می‌رسد که برای ساختن $\triangle DEF$ ، مثلث $\triangle ABC$ را به اندازه بردار $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ انتقال داده‌اید. ضلع $\overline{AC}$ از

مثلث $\triangle ABC$ ، بعد از این انتقال، به پاره‌خط شکسته $\overline{DF}$ (ضلع $\overline{DF}$) از مثلث $\triangle DEF$ تبدیل شده است. چرا بعد از این انتقال دو مثلث هم‌نهشت نیستند؟

انتقالی که شما به آن اشاره دارید، انتقال در مدل اقلیدسی است که، شکل انتقال یافته، هم‌نهشت با شکل اصلی است. ولی در این جا، در مدل مولتون هستیم که همین مثال نشان می‌دهد که ایزومتري‌های اقلیدسی در این مدل برقرار نیست. ■

مثال ۲۳-۳: نشان دهید مدل دکارتی با فاصله تاکسی در اصول هندسه خنثی صدق نمی‌کند.

حل: مثال نقض: مثال ۲۳-۱.

مثال ۲۳-۴: نشان دهید مدل با خط‌های سهمی در اصول هندسه خنثی صدق نمی‌کند.

حل: در مقاله [۱] مثالی از دو مثلث به صورت زیر در مدل با خط‌های سهمی ارائه شده است که با یک تناظر بین رأس‌ها در شرایط قضیهٔ سز سز صدق می‌کنند، ولی دو مثلث هم‌نهشت نیستند.

مثلث $\triangle PQR$ را با رأس‌های $P = (0, 0)$ ، $Q = (1, 1)$ و $R = (-1, -1)$ را در نظر بگیرید. در این مثلث داریم:

$$PQ = PR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) = a$$

$$m(\angle P) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

اکنون مثلث $\triangle ABC$ را با رأس‌های زیر در نظر می‌گیریم.

$$A = (0, 0), C = (0, -a), B = (b, b^2 + \frac{1}{4}b) \text{ که در آن، } b \text{ جواب معادلهٔ } \int_0^b \sqrt{1 + (2x + \frac{1}{4})^2} dx = a \text{ است.}$$

در مثلث $\triangle ABC$ ، داریم $AB = AC = a$ و $m(\angle A) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{2}$ ، ولی دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle PQR$ هم‌نهشت

نیستند. ■

قضیهٔ ۲۳-۴ مدل صفحهٔ اقلیدسی در اصول هندسهٔ خنثی صدق می‌کند.

اثبات: برای اثبات کتاب [۲] را نگاه کنید.

قضیهٔ ۲۳-۵ مدل نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره و مدل دیسک پوانکاره در اصول هندسهٔ خنثی صدق می‌کنند.

اثبات: برای اثبات کتاب [۲] را ببینید.

■ خلاصه آن چه در بخش ۲۳ خواندیم

- بخش ۲۳ آغاز هندسه خنثی است. در این بخش، هم‌نهشتی مثلث‌ها به‌طور دقیق تعریف شده است. سپس برای این که اهمیت اصل ض ض را نشان دهیم، مثال‌هایی از مدل مولتون ارائه دادیم که در آن‌ها، از یک نقطه خارج یک خط / دو عمود بر خط / می‌توان رسم کرد.
- در مثال ۱-۲۳، دو مثلث در مدل دکارتی با هندسه متریک ارائه دادیم که دو ضلع و زاویه بین آن‌ها هم‌نهشت‌اند، ولی دو مثلث هم‌نهشت نیستند. بعد، گفتیم که اگر اصل ض ض را به هندسه نقاله‌ای اضافه کنیم، هندسه‌ای غنی‌تر ساخته می‌شود که آن را هندسه خنثی یا هندسه مطلق می‌نامند.
- در این بخش، سه قضیه زیر را اثبات کردیم.
- **قضیه ۲-۲۳ (قضیه پل الاغ‌ها)** در هر هندسه خنثی، زاویه‌های مجاور به قاعده یک مثلث متساوی الساقین هم‌نهشت‌اند.
- **قضیه ۳-۲۳ (حالت هم‌نهشتی ض ض)** فرض کنید در یک هندسه خنثی، تحت یک تناظر بین رأس‌های دو مثلث، دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین نظیر از مثلث دیگر هم‌نهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- **قضیه ۴-۲۳ (عکس قضیه پل الاغ‌ها)** در یک هندسه خنثی، اگر در یک مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\angle B \cong \angle C$ آن‌گاه $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
- در آخر نشان دادیم که مدل‌های مولتون، مدل دکارتی با فاصله تاکسی و مدل با خط‌های سهمی در اصول هندسه خنثی صدق نمی‌کنند. سپس (بدون اثبات) دیدیم که مدل‌های صفحه اقلیدسی، مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره (و مدل دیسک پوانکاره) در اصول هندسه خنثی صدق می‌کنند.

قضیه ض ض و اثبات وجود عمود از یک نقطه خارج یک خط

A diagram of a triangle with vertices A' , B' , and C' . The side opposite vertex A' is labeled a' , the side opposite vertex B' is labeled b' , and the side opposite vertex C' is labeled c' .

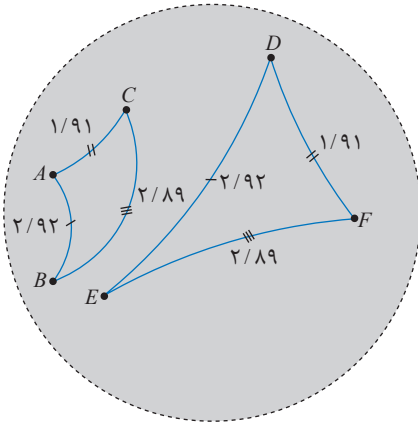


بنابراین $\angle A \approx \angle A'$. در نتیجه دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ به حالت ض ض هم‌نهشت‌اند. پس حالت ض ض ض تبدیل به ض ض ض می‌شود.

کاری که شما در بالا انجام دادید، استفاده از ویژگی‌های مدل صفحه اقلیدسی است؛ زیرا از قضیه کسینوس‌ها استفاده کردید که از قضیه‌های مربوط به مدل صفحه اقلیدسی است و ما مجاز نیستیم در اثبات قضیه‌های هندسه، از ویژگی‌های یک مدل خاصی استفاده کنیم.

شکل ۲-۲۴

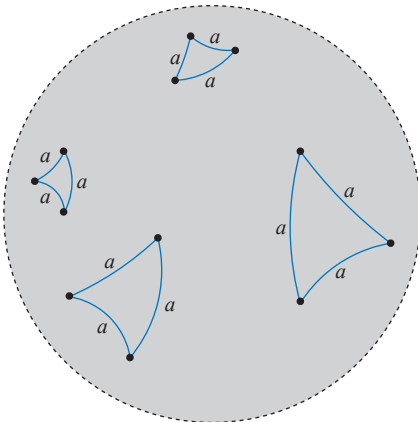
با ایده‌های داده شده در بالا، در حالت کلی، قضیه زیر ثابت می‌شود.



شکل ۶-۲۴

مثال ۱-۲۴: در شکل ۶-۲۴، دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ ، در مدل دیسک پوانکاره، داده شده‌اند. در این دو مثلث، داریم $\overline{AB} = \overline{DE}$ ، $\overline{AC} = \overline{DF}$ و $\overline{BC} = \overline{EF}$. چون مدل دیسک پوانکاره یک هندسهٔ خنثی است، بنابراین با تناظر $A \leftrightarrow D$ ، $C \leftrightarrow F$ و $B \leftrightarrow E$ ، دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ به حالت ض ض ض هم‌نهشت‌اند.

به نظر نمی‌رسد که این دو مثلث هم‌نهشت باشند. اگر مثلث $\triangle ABC$ را برداریم و به روی مثلث $\triangle DEF$ قرار دهیم، به روشنی معلوم است که $\triangle ABC$ بر $\triangle DEF$ منطبق نمی‌شود.



شکل ۷-۲۴

این نگاه شما به هم‌نهشتی مثلث‌ها همان تفکر اقلیدسی است. برای کسانی که خارج دیسک پوانکاره زندگی می‌کنند، مثلث نزدیک مرز کوچک‌تر به نظر می‌رسد، اما برای مردم سرزمین دیسک پوانکاره این دو مثلث هم‌نهشت‌اند (بنابر قضیهٔ ض ض ض).

در شکل ۷-۲۴ چهار مثلث متساوی‌الاضلاع، در مدل دیسک پوانکاره، را ملاحظه می‌کنید. تمام این مثلث‌ها، به حالت ض ض ض هم‌نهشت‌اند.

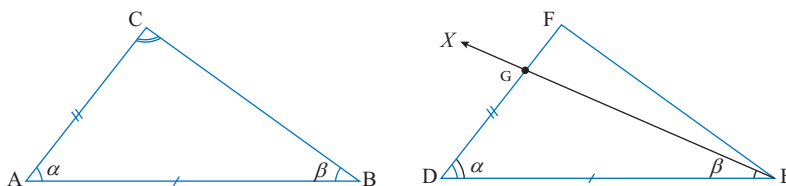
چرا قضیهٔ ض ض ز اصل ز ض را امیدید؟

دیدیم که از ض ض ض می‌توان ز ض را نتیجه گرفت. اکنون نشان می‌دهیم از ز ض ض می‌توان ض ض را نتیجه گرفت. بنابراین حالت ض ض ز با حالت ز ض ض معادل می‌شوند، و هر کدام از این‌ها را می‌توان به عنوان اصل به هندسهٔ نقاله‌ای اضافه کرد تا هندسهٔ خنثی ساخته شود.

قضیهٔ ۲-۲۴ اصل ز ض ز اصل ض ض ض را نتیجه می‌دهد.

اثبات: دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را با تناظر $A \leftrightarrow D$ ، $C \leftrightarrow F$ و $B \leftrightarrow E$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\angle A = \angle D$ ، $\overline{AB} = \overline{DE}$ و $\overline{AC} = \overline{DF}$. اگر $\angle ABC = \angle DEF$ ، آنگاه دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ به حالت ض ض ز هم‌نهشت می‌شوند. پس فرض می‌کنیم $\angle ABC < \angle DEF$.

بنابر اصل ساختن زاویه، در نیم صفحه H از خط $\overrightarrow{DE}$ شامل F ، نیم خط منحصربه فرد $\overrightarrow{EX}$ وجود دارد، به طوری که $\angle DEX = \angle ABC$ (شکل ۸-۲۴). بنابر قضیه قطعه بر، نیم خط $\overrightarrow{EX}$ ضلع $\overline{FD}$ را در نقطه G قطع می کند به طوری که $D - G - F$ ، دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEG$ به حالت ض ض زهم نهشت اند؛ در نتیجه، $AC = DG$. بنابراین $AC = DG < DF$ که یک تناقض است، زیرا بنابر فرض $AC = DF$.



شکل ۸-۲۴

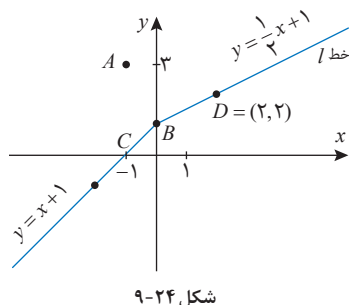
شکل مربوط به قضیه ۲-۲۴ در مدل صفحه اقلیدسی

وجود عمود از نقطه ای خارج یک خط

در قضیه ۱-۲۲ دیدیم که، در هندسه نقاله ای، از هر نقطه واقع بر یک خط l ، یک خط عمود l' بر l وجود دارد، و این عمود منحصربه فرد است. چگونه نشان دهیم که از یک نقطه P خارج یک خط l فقط یک خط l' عمود بر خط l می توان رسم کرد؟

در کدام هندسه این سؤال را می پرسید؟ اگر در هندسه نقاله ای این سؤال را مطرح می کنید، پاسخ این است: در هندسه نقاله ای، مدلی وجود دارد، که در آن مدل، خطی و نقطه ای خارج آن خط وجود دارد، به طوری که از آن نقطه، هیچ خط عمودی بر آن خط وجود ندارد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۲۴: در شکل ۹-۲۴، در مدل مولتون، خط l و نقطه $A = (-1, 3)$ خارج آن داده شده است. نشان دهید از نقطه A هیچ عمودی بر خط l وجود ندارد.



شکل ۹-۲۴

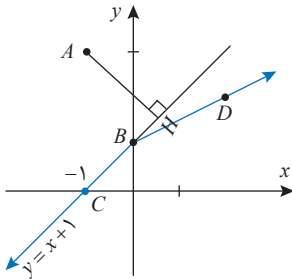
$$l: y = \begin{cases} x+1 & , x < 0 \\ \frac{1}{2}x+1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

حل:

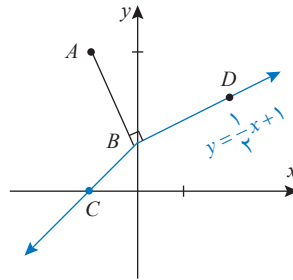
حالت اول: نقطه $B = (0, 1)$ پای عمود از A بر خط l است. در این صورت، باید داشته باشیم $m_M(\angle ABC) = 90^\circ$. اما با توجه به این که نقطه های A و C در یک طرف محور y قرار دارند، داریم:

$$m_M(\angle ABC) = m_E(\angle ABC) = \cos^{-1} \frac{(C-B) \cdot (A-B)}{|C-B| |A-B|} = \cos^{-1} \frac{(-1, 2) \cdot (-1, -1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \cos^{-1} \frac{-1}{\sqrt{10}} \approx 108.4^\circ$$

بنابراین نقطه B نمی‌تواند پای عمود از نقطه A بر خط l باشد.



شکل ۱۰-۲۴



شکل ۱۱-۲۴

حالت دوم: پای عمود (از نقطه A بر خط l) روی نیم خط $\overrightarrow{BC}$ قرار دارد. در مدل اقلیدسی، معادله خط گذرنده از A و عمود بر خط اقلیدسی $y = x + 1$: $\overrightarrow{BC}$ به صورت $y = -x + 2$ است. این خط عمود خط اقلیدسی $\overrightarrow{BC}$ را در نقطه $H = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ قطع می‌کند که بر نیم خط $\overrightarrow{BC}$ واقع نیست. پس پای عمود از نقطه A بر خط مولتون l بر نیم خط $\overrightarrow{BC}$ واقع نیست (شکل ۱۰-۲۴).

حالت سوم: پای عمود (از نقطه A بر خط l) روی نیم خط $\overrightarrow{BD}$ واقع است. در مدل اقلیدسی، معادله خط گذرنده از A و عمود بر خط اقلیدسی $y = \frac{1}{3}x + 1$: $\overrightarrow{BD}$ به صورت $y = -2x + 1$ است. این خط عمود، خط اقلیدسی $\overrightarrow{BD}$ را در نقطه $(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$ قطع می‌کند؛ در حالت اول دیدیم که نقطه $(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$ نمی‌تواند پای عمود بر خط l باشد (شکل ۱۱-۲۴).

بنابراین، در مدل مولتون، هیچ خط عمودی از نقطه $A = (-1, 2)$ بر خط شکسته l :
$$l: \begin{cases} y = x + 1 & , x < 0 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

وجود ندارد. ■

اکنون نشان می‌دهیم با اضافه کردن اصل ض ض (یا معادل آن ض ز) به هندسه نقاله‌ای؛ یعنی در هندسه خنثی، از یک نقطه خارج یک خط l ، حداقل یک خط عمود بر l وجود دارد.

چگونه وجود خاصیت ض ض (یا ض ز) در یک هندسه نقاله‌ای، وجود عمود از نقطه‌های خارج یک خط را تضمین می‌کند؟

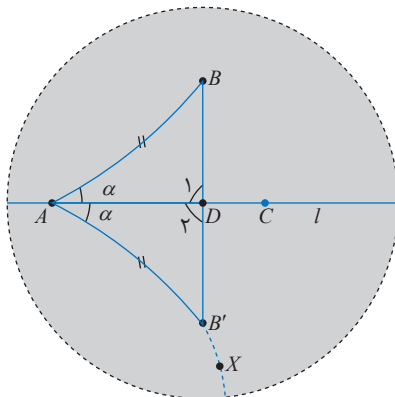
ایده اثبات به این صورت است که از نقطه P خارج l خطی می‌سازیم که با خط l دو زاویه مجانب و هم‌نهیست بسازد. برای این کار، دو مثلث هم‌نهیست می‌سازیم که این دو زاویه مجانب، دو زاویه نظیر از آن دو مثلث هم‌نهیست باشند.

قضیه ۳-۲۴ در هندسه خنثی، از یک نقطه B خارج یک خط l ، حداقل یک خط عمود بر خط l وجود دارد.

اثبات: روی خط l دو نقطه متمایز A و C را می‌گیریم. فرض کنید $m(\angle BAC) = \alpha$. بنابر قضیه ساختن زاویه، در طرفی از خط l که نقطه B نیست، نیم‌خط $\overrightarrow{AX}$ را می‌سازیم، به طوری که $m(\angle CAX) = \alpha$. اگر $\alpha = 90^\circ$ ، در این صورت، خط $\overrightarrow{BA}$ بر l عمود است.

در غیر این صورت، روی نیم‌خط $\overrightarrow{AX}$ ، بنابر قضیه ساختن پاره خط، نقطه B' وجود دارد، به طوری که $\overline{AB'} \cong \overline{AB}$. چون B و B' در دو طرف خط l واقع‌اند، بنابر اصل جداسازی صفحه، پاره خط $\overline{BB'}$ خط l را قطع می‌کند؛ نقطه تقاطع را D می‌نامیم. دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle AB'D$ به حالت ض ض هم‌نهشت‌اند (با تناظر $A \leftrightarrow A$ ، $B \leftrightarrow B'$ و $D \leftrightarrow D$). در نتیجه، $\angle D_1 \cong \angle D_2$ ؛ زاویه‌های $\angle D_1$ و $\angle D_2$ دوزاویه مجانب و هم‌نهشتند، بنابراین قائمه‌اند. پس $\overrightarrow{BB'} \perp l$. ■

ملاحظه کردید که در اثبات قضیه ۲۴-۳ از اصل ض ض استفاده شده است که در مدل‌های هندسه انتقاله‌ای لزوماً برقرار نیست.

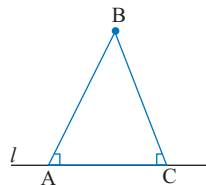


شکل ۱۲-۲۴

شکل مربوط به قضیه ۲۴-۳ در مدل دیسک پوانکاره

آیا این عمود از یک نقطه خارج خط (که وجود آن را ثابت کردید) منحصر به فرد است؟

برای پاسخ به سؤال شما، بیایید فرض کنیم خطی مانند l و نقطه‌ای مانند B خارج l وجود داشته باشد که از آن نقطه دو خط عمود بر l وجود دارد. در این صورت، چه اتفاقی می‌افتد؟



شکل ۱۳-۲۴

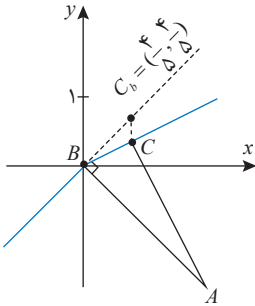
در این صورت، مثلی به وجود می‌آید که دارای دو زاویه قائمه است؛ و این غیرممکن است (شکل ۱۳-۲۴).

چرا غیرممکن است؟

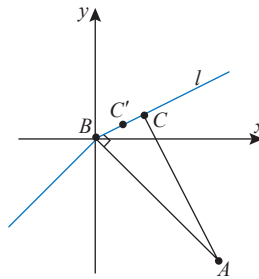
؟ زیرا می‌دانیم هر زاویه خارجی یک مثلث از هر کدام از زاویه‌های داخلی غیرمجاور آن زاویه بزرگ‌تر است.

اما در مثال زیر، در مدل مولتون، یک خط l و یک نقطه P خارج l ارائه می‌دهیم که از آن نقطه دو خط عمود بر l وجود دارد.

مثال ۲۴-۳: سه نقطه $A = (2, -2)$ ، $B = (0, 0)$ و $C = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ را در مدل مولتون در نظر بگیرید (شکل ۲۴-۱۴). نشان دهید زاویه‌های $\angle ABC$ و $\angle ACB$ هر دو قائمه‌اند و بنابراین از نقطه A خارج خط $BC = \overrightarrow{l}$ دو عمود بر خط l می‌توان رسم کرد.



شکل ۲۴-۱۴



شکل ۲۴-۱۵

حل: برای محاسبه اندازه $\angle ABC$ ، ابتدا C_b و A_b را به دست می‌آوریم: $(b = 0)$.

$$C_b = \left(\frac{4}{5}, 2\left(\frac{2}{5}\right) - 0 \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5} \right) \quad (\text{زیرا } x_C > 0, y_C > b)$$

$$A_b = A = (2, -2) \quad (\text{زیرا } y_A < b)$$

$$m_M(\angle ABC) = m_E(\angle A_b B C_b) = \cos^{-1} \left(\frac{\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5} \right) \cdot (2, -2)}{\left(\frac{4}{5} \sqrt{2} \right) (2 \sqrt{2})} \right) = 90^\circ$$

محاسبه اندازه زاویه $\angle ACB$ ساده است، زیرا رأس زاویه، C ، روی محور y نیست. ابتدا $C' = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ را روی نیم خط

$\overrightarrow{CB}$ می‌گیریم (شکل ۲۴-۱۵). چون A ، C' و C هر سه در یک طرف محور y قرار دارند، بنابراین:

$$m_M(\angle ACB) = m_E(\angle ACC') = \cos^{-1} \left(\frac{\left(\frac{-3}{5}, \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{6}{5}, -\frac{12}{5} \right)}{\left(\frac{3}{5} \sqrt{5} \right) \left(\frac{6}{5} \sqrt{5} \right)} \right) = 90^\circ \quad \blacksquare$$

■ خلاصه آن چه در بخش ۲۴ خواندیم

- این بخش را با اثبات قضیه ض ض ض شروع کردیم. در مثال ۱-۲۴، دو مثلث هم‌نهشت در مدل دیسک پوانکاره مطرح شد که با دیدگاه اقلیدس به نظر نمی‌آید هم‌نهشت باشند.
- در قضیه ۲-۲۴ نشان دادیم که حالت هم‌نهشتی ض ض ض حالت هم‌نهشتی ض ض ض را نتیجه می‌دهد.
- در مثال ۲-۲۴، نشان دادیم که در مدل مولتون می‌توان یک خط l و یک نقطه P خارج آن یافت؛ به طوری که از نقطه P هیچ عمودی بر خط l وجود ندارد.
- سپس در قضیه ۳-۲۴، ثابت کردیم که با افزودن اصل ض ض ض به هندسه نقاله‌ای، از هر نقطه خارج یک خط، حداقل یک خط عمود بر آن خط وجود دارد.
- در مثال ۳-۲۴، در مدل مولتون، یک خط l و یک نقطه A خارج آن ارائه دادیم که از A دو عمود بر خط l وجود دارد.