# « پاسخ تحلیلی ریاضی تجربی»

«مهندس افشین ملاک‌پور»
«مهندس علی‌رضا شریف‌خطیبی»

**۱۲۶- پاسخ گزینه‌ی ۴** اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، داریم: $b^۲ = ac$

با توجه به آن‌که اعداد $۸-x$، $x$ و $۱۲+x$ سه جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی می‌باشند، پس:

$$x^۲ = (۱۲+x)(۸-x) \Rightarrow x^۲ = ۹۶-۱۲x+۸x-x^۲ \Rightarrow ۲x^۲+۴x-۹۶=۰$$

$$x^۲+۲x-۴۸=۰ \Rightarrow (x+۸)(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۸ \\ x=۶ \end{cases}$$

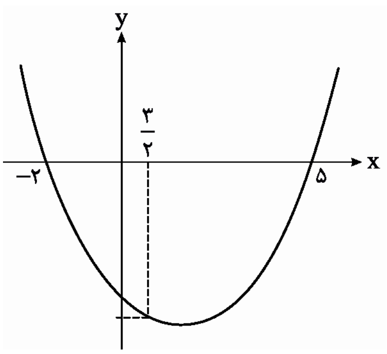
اگر $x=-۸$ باشد، اعداد به‌صورت ۱۶، ۸- و ۴ خواهدبود که دراین‌صورت دنباله نه صعودی است و نه نزولی. ولی $x=۶$ اعداد را به‌صورت ۲، ۶ و ۱۸ در خواهدآورد که یک دنباله‌ی هندسی نزولی با قدر نسبت $q=\frac{۱}{۳}$ است. در انتها برای به‌دست‌آوردن حد مجموع جملات داریم:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_۱}{۱-q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{۱۸}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱۸}{\frac{۲}{۳}} = ۲۷$$

**۱۲۷- پاسخ گزینه‌ی ۳** نمودار تابع $y=x^۲-۳x-۱۰$ یک سهمی قائم است که محور xها را در دو نقطه قطع‌می‌کند.

$$y=۰ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۵\,,\,x=-۲$$

با توجه به آن‌که سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کرده‌است، اگر سهمی را ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال‌دهیم، سهمی از مبدأ خواهدگذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور xها منفی نیست. به نمودار روبه‌رو دقت کنید.




**۱۲۸- پاسخ گزینه‌ی ۳** با توجه به نمودار رسم‌شده متوجه‌می‌شویم دوره‌ی تناوب تابع ۶ می‌باشد و می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y=a\sin bx$ از رابطه‌ی $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ به‌دست‌می‌آید. پس داریم:

$$y=a\sin(b\pi x) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۶ \Rightarrow \frac{۲\cancel{\pi}}{|b|\cancel{\pi}}=۶ \Rightarrow \frac{۱}{|b|}=۳ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۳}$$

از طرفی در تابع $y=a\sin bx$ ماکزیمم تابع برابر $|a|$ است. چون در حاصل ماکزیمم برابر ۲ است. پس:

$$|a|=۲ \Rightarrow a=\pm ۲$$

در انتها دقت‌شود با توجه به آن‌که تابع بلافاصله بعد از $x=۰$ افزایش‌می‌یابد. باید علامت a و b یکسان باشند. یعنی برای a و b دو حالت ایجاد می‌شود.

$$a=۲\,,\,b=\frac{۱}{۳} \Rightarrow y=۲\sin\frac{\pi x}{۳} \Rightarrow a+b=\frac{۷}{۳}$$

$$a=-۲\,,\,b=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow y=-۲\sin\left(\frac{-\pi x}{۳}\right)=۲\sin\frac{\pi x}{۳} \Rightarrow a+b=-\frac{۷}{۳}$$

**۱۲۹- پاسخ گزینه‌ی ۲** ابتدا ماتریس $B\times A$ را به‌دست‌می‌آوریم:

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۰ & -۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست‌می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\ ,\ |A|=ad-bc$$

پس وارون ماتریس $B\times A$ برابر است با:

$$(B\times A)^{-۱}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۰ & -۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۰/۱ & -۰/۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده‌می‌شود درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس $(B\times A)^{-۱}$ برابر $-۰/۱$ است.

**۱۳۰- پاسخ گزینه‌ی ۱** با توجه به نمودار ساقه و برگ داده‌شده، پایین‌ترین درصد ۶۰ و بالاترین ۹۵ می‌باشد. پس دامنه‌ی تغییرات برابر است با: $۹۵-۶۰=۳۵$. از آنجایی‌که نمرات در پنج گروه دسته‌بندی می‌شوند، می‌توان طول هر دسته را به‌دست‌آورد.

$$\text{طول دسته}=\frac{\text{دامنه‌ی تغییرات}}{\text{تعداد دسته}} \Rightarrow \text{طول دسته}=\frac{۳۵}{۵}=۷$$

بین دسته‌ها به‌صورت زیر است:

| دسته‌ی اول | دسته‌ی دوم | دسته‌ی سوم | دسته‌ی چهارم | دسته‌ی پنجم |
|---|---|---|---|---|
| $۶۰-۶۷$ | $۶۷-۷۴$ | $۷۴-۸۱$ | $۸۱-۸۸$ | $۸۸-۹۵$ |

منظور از محاسبه فراوانی نسبی، بلندی میله نظیر داده ۷۷/۵ محاسبه‌ی فراوانی نسبی دسته‌ی سوم می‌باشد. (مرکز دسته‌ی سوم ۷۷/۵ است.) که برای به‌دست‌آوردن فراوانی نسبی این دسته باید تعداد داده‌های بازه‌ی $[۷۴\ ,\ ۸۱)$ را بر تعداد کل داده‌ها تقسیم کنیم. از روی نمودار ساقه و برگ تعداد داده‌های واقع در دسته‌ی سوم فقط ۲ داده‌ی ۷۵ و ۷۶ می‌باشد. پس فراوانی نسبی برابر است با:

$$\text{فراوانی نسبی}=\frac{f_i}{n}=\frac{۲}{۲۰}=۰/۱$$

**۱۳۱- پاسخ گزینه‌ی ۳** واریانس $n$ داده‌ی آماری با میانگین $\bar{x}$ از رابطه‌ی $\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲}{n}$ به‌دست‌می‌آید. پس داریم:

$$\frac{\sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i-۲۵)^۲}{۱۸}=۹ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i-۲۵)^۲=۹\times۱۸=۱۶۲$$

داده‌های اضافه‌شده یعنی ۲۰، ۲۷ و ۲۸ میانگین ۲۵ دارند. پس با اضافه‌شدن این سه داده میانگین تغییر نمی‌کند. اما واریانس ۲۱ داده‌ی جدید برابر است با:

$$\sigma'^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i-۲۵)^۲+(۲۰-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۸-۲۵)^۲}{۲۱}=\frac{۱۶۲+۲۵+۴+۹}{۲۱}=\frac{۲۰۰}{۲۱}\simeq۹/۵۲$$

**۱۳۲- پاسخ گزینه‌ی ۲** ابتدا احتمال آن را محاسبه می‌کنیم که از میان ۳ مهره خارج‌شده اصلاً مهره‌ی آبی خارج‌نشده‌باشد، یعنی ۳ مهره از میان ۵ مهره‌ی قرمز و سفید باشد.

حداقل یک مهره، آبی باشد.

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۵}{۴۲} \Rightarrow P(A')=۱-\frac{۵}{۴۲}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

**۱۳۳- پاسخ گزینه‌ی ۱**

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} = \frac{۲(۲)}{۱-۴} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\tan(۲\alpha-\beta) = \frac{\tan ۲\alpha - \tan\beta}{۱+\tan ۲\alpha.\tan\beta} = \frac{-\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}} = \frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}} = -۳$$

**۱۳۴- پاسخ گزینه‌ی ۲**

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}} = \frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲} = \frac{۰}{۰}$$

برای $x\to ۲^+$ داریم: $|x-۲| = x-۲$

برای رفع ابهام بهتر است از قاعده‌ی هوپیتال استفاده‌کنیم: (در این روش از صورت و مخرج کسر به‌طور مستقل مشتق‌گرفته و سپس حاصل حد را محاسبه‌می‌کنیم.)

$$Hop: \lim_{x\to ۲^+} \frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}}}{۱} = -\frac{۱}{۱۲}$$

روش دوم برای رفع ابهام استفاده از اتحاد $(a-b)(a^۲+ab+b^۲) = a^۳-b^۳$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲} \times \frac{۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}}{۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}} =$$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-x}{(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{-۱}{۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}} = -\frac{۱}{۱۲}$$

**۱۳۵- پاسخ گزینه‌ی ۲** باید تابع در نقطه‌ی $x=\pi$ حد داشته‌باشد.

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از اتحاد $۱+\cos x = ۲\cos^۲\frac{x}{۲}$ استفاده‌می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۲}\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{-\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{x-\pi} = \frac{۰}{۰}$$

برای $x\to\pi^+$ داریم: $\left|\cos\frac{x}{۲}\right| = -\cos\frac{x}{۲}$

$$Hop: \lim_{x\to\pi^+} \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{x}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} a\cos\frac{۲x}{۳} = a\cos\frac{۲\pi}{۳} = a\cos\left(\pi-\frac{\pi}{۳}\right) = -a\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{a}{۲}$$

باید حد راست و چپ با هم برابر باشد، داریم:

$$-\frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a = -\sqrt{۲}$$

**۱۳۶- پاسخ گزینه‌ی ۱** آهنگ متوسط تغییر تابع هنگامی‌که متغیر از مقدار $x_۱$ به مقدار $x_۲$ تغییر می‌کند برابر است با: $\dfrac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$ و آهنگ لحظه‌ای تابع در $x_۱$ برابر است با $f'(x_۱)$.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۶/۲۵)-f(۴)}{۶/۲۵-۴} = \frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴}}{۲/۲۵} = \frac{۲/۵-۲}{۲/۲۵} = \frac{۰/۵}{۲/۲۵} = \frac{۵۰}{۲۲۵} = \frac{۲}{۹}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow x=۴ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}$$

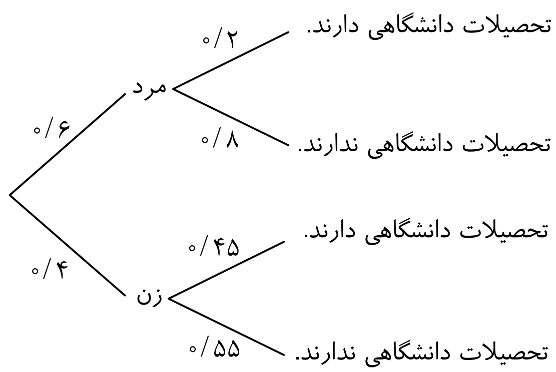
$$\text{تفاضل آهنگ لحظه‌ای و متوسط} = \frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۹}=\frac{۹-۸}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

**۱۳۷- پاسخ گزینه‌ی ۳**

$$y=\sin^۳\sqrt{۲x} \Rightarrow y'=۳\left(\frac{\cancel{۲}}{\cancel{۲}\sqrt{۲x}}\cos\sqrt{۲x}\right)\sin^۲\sqrt{۲x}$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi^۲}{۱۸}\right)=۳\left(\frac{۱}{\frac{\pi}{۳}}\cos\frac{\pi}{۳}\right)\sin^۲\frac{\pi}{۳}=۳\left(\frac{۳}{\pi}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{۳}{۴}=\frac{۲۷}{۸\pi}$$

**۱۳۸- پاسخ گزینه‌ی ۱**




$$P\,(\text{تحصیلات دانشگاهی‌داشتن}) = ۰/۶\times ۰/۲+۰/۴\times ۰/۴۵=۰/۱۲+۰/۱۸=۰/۳$$

برای محاسبه‌ی آن‌که از میان ۳ نفر، ۲ نفرشان تحصیلات دانشگاهی داشته‌باشند، از رابطه‌ی توزیع دوجمله‌ای استفاده‌می‌کنیم: (احتمال موفقیت ۰/۳ است.)

$$P(X=K)=\binom{n}{K}P^K(۱-P)^{n-K}=\binom{۳}{۲}(۰/۳)^۲(۰/۷)=۳\times ۰/۰۹\times ۰/۷=۰/۱۸۹$$

**۱۳۹- پاسخ گزینه‌ی ۱** باید معادله‌ی تلاقی نمودار تابع $y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$ با نیمساز ناحیه‌ی اول $(y=x)$ ریشه‌ی مضاعف داشته‌باشد.

$$۲x^۲+(m+۱)x+m+۶=x \Rightarrow ۲x^۲+mx+m+۶=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} m^۲-۴(۲)(m+۶)=۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸=۰ \Rightarrow (m-۱۲)(m+۴)=۰ \Rightarrow m=۱۲\,,\, m=-۴$$

چون تأکیدشده نمودار بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است، ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

$m=۱۲ \Rightarrow ۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰ \Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰$ ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.

$m=-۴ \Rightarrow ۲x^۲-۴x+۲=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰$ ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد.

پس $m=-۴$ صحیح است، به‌ازای $m=۱۲$ نمودار بر نیمساز ربع سوم مماس است.

**۱۴۰- پاسخ گزینه‌ی ۴** دو منحنی $y=۲^x$ و $y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴$ را با یک‌دیگر تلاقی‌می‌دهیم:

$$(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴=۲^x \Rightarrow \sqrt{۲}(\sqrt{۲})^x+۴=۲^x \Rightarrow ۲^x-\sqrt{۲}.۲^{\frac{x}{۲}}-۴=۰$$

$$\xrightarrow{۲^{\frac{x}{۲}}=t} t^۲-\sqrt{۲}t-۴=۰ \Rightarrow t=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲+۱۶}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}\pm ۳\sqrt{۲}}{۲}=\begin{cases} t_۱=۲\sqrt{۲} \\ t_۲=-\sqrt{۲} \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$۲^{\frac{x}{۲}}=۲\sqrt{۲}=۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow x=۳,\ y=۲^۳=۸$$

$A(۰,۴),\ B(۳,۸)$

$AB=\sqrt{۹+۱۶}=۵$

**۱۴۱- پاسخ گزینه‌ی ۳**

$$\log_x^{(۳x+۸)}+\log_x^{(x-۶)}=۲ \Rightarrow \log_x^{(۳x+۸)(x-۶)}=۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲-۱۸x+۸x-۴۸=x^۲ \Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۴۸=۰ \Rightarrow x^۲-۵x-۲۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۸)(x+۳)=۰ \Rightarrow x=۸,\ x=-۳ \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

$$\log_۴^x=\log_۴^۸=\log_{۲^۲}^{۲^۳}=\frac{۳}{۲}$$

**۱۴۲- پاسخ گزینه‌ی ۴**

$$\frac{\sin ۳x}{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)}=۱ \Rightarrow \frac{\sin ۳x}{\sin x}=۱ \Rightarrow \sin ۳x=\sin x$$

$$۳x=۲k\pi+x \Rightarrow x=k\pi \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

$$۳x=۲k\pi+\pi-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

دقت‌شود $\sin x$ در مخرج کسر قراردارد و ریشه‌های $\sin x$ جزء دامنه نمی‌باشد. پس $x=k\pi$ باید از مجموعه جواب حذف شود، یعنی جواب کلی معادله برابر است با: $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$

**۱۴۳- پاسخ گزینه‌ی ۴** برای تعیین شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن مشتق، منحنی را به‌ازای آن نقطه به‌دست‌می‌آوریم.

$$y=xe^{x^۲-۴} \xrightarrow{x=۲} y=۲e^۰=۲ \Rightarrow \text{نقطه‌ی تماس: } A(۲,۲)$$

$$y'=e^{x^۲-۴}+۲xe^{x^۲-۴}x \Rightarrow m=y'(۲)=e^۰+۸e^۰=۹ \Rightarrow \text{شیب قائم: }=-\frac{۱}{۹}$$

$$\text{معادله‌ی قائم: } y-۲=-\frac{۱}{۹}(x-۲) \xrightarrow{y=۰} -۲=-\frac{۱}{۹}(x-۲) \Rightarrow ۱۸=x-۲ \Rightarrow x=۲۰$$

**۱۴۴- پاسخ گزینه‌ی ۲** برای آن‌که تابع در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، باید در این نقطه حد داشته‌باشد، پیوسته باشد و ضمناً مشتق‌های راست و چپ آن با هم برابر باشند.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۳}{x}-۵ & x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & x<۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)\begin{cases} \xrightarrow{1^+} 3-5=-2 \\ \xrightarrow{1^-} 1+a+b \end{cases} \Rightarrow\ 1+a+b=-2\ \Rightarrow\ a+b=-3 \qquad (\text{رابطه‌ی } I)$$

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{x^2} & x\geq 1 \quad f'_+(1)=-3 \\ 2x+a & x<1 \quad f'_-(1)=2+a \end{cases} \Rightarrow\ 2+a=-3\ \Rightarrow\ a=-5$$

$a=-5$ را در $I$ قرار می‌دهیم، داریم:

$$-5+b=-3\ \Rightarrow\ b=2$$

**۱۴۵- پاسخ گزینه‌ی ۱** برای آن‌که تابع صعودی باشد، باید $f'(x)>0$ و برای آن‌که تقعر آن رو به پایین باشد، باید $f''(x)<0$ باشد.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-3x^2\ \Rightarrow\ f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x>0\ \Rightarrow\ 2x^3+3x^2-12x=0$$

$$\Rightarrow\ x(2x^2+3x-12)=0\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9+96}}{4}=\begin{cases} x'\simeq\dfrac{7}{4} \\ x''\simeq-\dfrac{13}{4}\end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{13}{4}$ | | $0$ | | $\frac{7}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

تابع در بازه‌ی $\left(-\frac{13}{4}\,,0\right)$ و $\left(\frac{7}{4}\,,+\infty\right)$ صعودی است.

$$f''(x)=3x^2+3x-6<0\ \Rightarrow\ x^2+x-2<0\ \Rightarrow\ -2<x<1$$

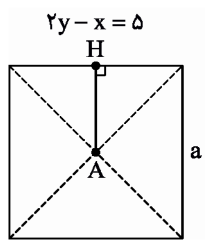
در بازه‌ی $(-2\,,1)$ تقعر تابع به طرف پایین است. اشتراک $f'>0$ و $f''<0$ بازه‌ی $(-2\,,0)$ می‌باشد.

**۱۴۶- پاسخ گزینه‌ی ۴** با توجه به نمودار تابع $y=\dfrac{x^2+ax-2}{x+b}$، $x=0$ مجانب قائم تابع است. یعنی $x=0$ ریشه‌ی مخرج است. پس $b=0$ و ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=\dfrac{x^2+ax-2}{x}$ درخواهدآمد.

$$y=\frac{x^2+ax-2}{x}=x+a-\frac{2}{x}\ \Rightarrow\ y=x+a \quad \text{مجانب مایل}$$

با توجه به نمودار، عرض از مبدأ مجانب مایل منفی است، یعنی باید $a<0$ باشد.

**۱۴۷- پاسخ گزینه‌ی ۴** مطابق شکل فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از ضلع مربع برابر نصف طول ضلع است و می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0\,,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ از رابطه‌ی $AH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به‌دست‌می‌آید.




$A(3\,,-1)$

$2y-x=5\ \Rightarrow\ x-2y+5=0$

$AH=\dfrac{|3+2+5|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

$\dfrac{a}{2}=2\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a=4\sqrt{5}\ \Rightarrow\ s=a^2=(4\sqrt{5})^2=80$

**۱۴۸- پاسخ گزینه‌ی ۲** در دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ مختصات مرکز و طول شعاع به‌صورت زیر است:

$$c\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right),\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰$$

$$c(۱,-۲)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$$

از طرفی اگر دو دایره‌ی مماس خارج باشد، داریم: $cc'=R+R'$

$$c(۱,-۲),\ c'(-۲,۲)\ \Rightarrow\ cc'=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$cc'=R+R'\ \Rightarrow\ ۵=۲+R'\ \Rightarrow\ R'=۳$$

**۱۴۹- پاسخ گزینه‌ی ۱** می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت، مقدار ثابتی باشد یک هذلولی است که آن نقاط ثابت کانون‌های هذلولی و مقدار ثابت را با $۲a$ نشان‌می‌دهیم. پس:

$$F(۲,۶),\ F'(۲,-۴),\ ۲a=۶\ \Rightarrow\ a=۳$$

چون کانون‌ها هم‌طولند، هذلولی قائم است و مختصات مرکز هذلولی (وسط $FF'$) نقطه‌ی $o(۲,۱)$ می‌باشد. از طرفی: $oF=c=۵$

با داشتن $a$ و $c$ می‌توان $b$ را به‌دست‌آورد:

$$b^{۲}=c^{۲}-a^{۲}\ \Rightarrow\ b^{۲}=۲۵-۹=۱۶\ \Rightarrow\ b=۴$$

معادله‌ی هذلولی قائم به‌صورت زیر است که آن را با خط $x=۵$ تلاقی‌می‌دهیم.

$$\frac{(y-۱)^{۲}}{۹}-\frac{(x-۲)^{۲}}{۱۶}=۱\ \xrightarrow{x=۵}\ \frac{(y-۱)^{۲}}{۹}-\frac{۹}{۱۶}=۱$$

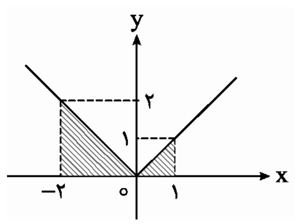
$$\frac{(y-۱)^{۲}}{۹}=\frac{۲۵}{۱۶}\ \Rightarrow\ (y-۱)^{۲}=\frac{۲۵\times۹}{۱۶}\ \Rightarrow\ y-۱=\pm\frac{۱۵}{۴}\ \Rightarrow\ y=۱\pm\frac{۱۵}{۴}$$

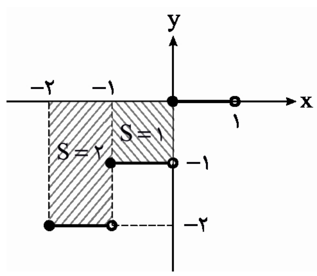
**۱۵۰- پاسخ گزینه‌ی ۴** برای محاسبه‌ی $\int_{-۲}^{۱}(|x|-[x])dx$ بهتر است از روش رسم استفاده‌کنیم:

$$\int_{-۲}^{۱}|x|dx=\frac{۲\times۲}{۲}+\frac{۱\times۱}{۲}=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\int_{-۲}^{۱}[x]dx=-۲-۱=-۳$$

$$\int_{-۲}^{۱}(|x|-[x])dx=\frac{۵}{۲}-(-۳)=\frac{۵}{۲}+۳=۵/۵$$




**۱۵۱- پاسخ گزینه‌ی ۳**

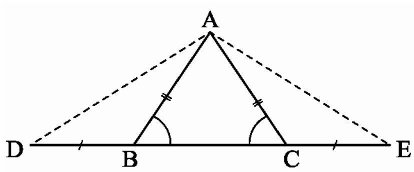
$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{x}\right)^{۲}dx=\frac{f(x)}{۲x}+C$$

$$\int\left(x-\frac{۲\sqrt{x}}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}\right)dx=\int(x-۲x^{-\frac{۱}{۲}}+x^{-۲})dx=\frac{x^{۲}}{۲}-۲\times۲x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{x^{-۱}}{-۱}+C$$

$$\frac{x^{۲}}{۲}-۴\sqrt{x}-\frac{۱}{x}+C=\frac{x^{۳}-۸x\sqrt{x}-۲}{۲x}+C\ \Rightarrow\ f(x)=x^{۳}-۸x\sqrt{x}-۲$$

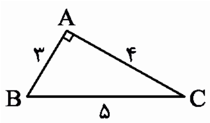
**۱۵۲- پاسخ گزینه‌ی ۳**

$$\left.\begin{array}{l}AB=BD\\ CE=CA\end{array}\right\}\xrightarrow[AB=AC]{\text{متساوی‌الساقین }\overset{\Delta}{ABC}} \left.\begin{array}{r}AC=AB=BD=CE\\ \\ \text{متساوی‌الساقین }\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ACE}\cong\overset{\Delta}{ABD}\Rightarrow \hat{D}=\hat{E}=\alpha$$




$$\left.\begin{array}{l}ADE\text{ کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی }=\hat{D}+\hat{E}=۲\alpha\\ ADE\text{ کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی }=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲\alpha}{\alpha}=۲$$

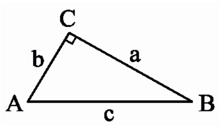
**۱۵۳- پاسخ گزینه‌ی ۲** چون مثلث قائم‌الزاویه است، پس مرکز دایره‌ی محیطی آن روی وتر است.




$$\text{هاشورخورده}=AC\text{ نصف مساحت دایره‌ی روی }+AB\text{ نصف مساحت دایره‌ی روی }+\overset{\Delta}{ABC}\text{ مساحت مثلث }-\overset{\Delta}{ABC}\text{ نصف مساحت دایره‌ی محیطی}$$

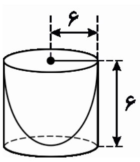
$$\Rightarrow\ \text{هاشورخورده}=\frac{۲^۲\pi}{۲}+\frac{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲\pi}{۲}+\frac{۴\times۳}{۲}-\frac{\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲\pi}{۲}=۶$$

**۱۵۴- پاسخ گزینه‌ی ۱**




$$S_{\text{مثلث}}=\frac{c^۲}{۸}=\frac{ab}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{۴}=\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)=\sin A\cos A\xrightarrow{\times۲}\sin ۲A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=۱۵^\circ$$

**۱۵۵- پاسخ گزینه‌ی ۴**




$$V_{\text{محدود}}=V_{\text{استوانه}}-V_{\text{نیم‌کره}}=۶^۲\pi\times۶-\frac{\frac{۴}{۳}\pi\times۶^۳}{۲}=۷۲$$

**ریاضی تجربی: مهندس افشین ملاک‌پور**

**هندسه تجربی: مهندس علی‌رضا شریف‌خطیبی**