



## « پاسخ تشریحی و تحلیلی ریاضیات »

«مهندس رامین منوری»

«مهندس علی‌رضا شریف‌خطیبی»

«مهندس عطا صادقی»

$$\sqrt[3]{A} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^4} \sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

۱۰۱ - پاسخ گزینه‌ی ۱

$$= \sqrt[6]{(2 - \sqrt{3})^4 (2 + \sqrt{3})^8 (\sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{((2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))^4 (2 - \sqrt{3})(2)} = \sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt[6]{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow A = \sqrt{3} - 1$$

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \Rightarrow f(a) = g(3) = -2 \Rightarrow -\sqrt{-a} = -2$$

۱۰۲ - پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$y = \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 2^x} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^x$$

۱۰۳ - پاسخ گزینه‌ی ۴

اگر  $a > 1$  و  $a^m \geq a^n$  آن‌گاه  $m \geq n$  بنابراین:

$$\frac{1}{x} \geq x \Rightarrow \frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x}$$

x	-∞	-1	0	1	+∞
	+	o	-	x	+
	+	o	-	+	-

$$\Rightarrow D_y = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$$

۱۰۴ - پاسخ گزینه‌ی ۴

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \\ \hat{B} &= 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ \Rightarrow \sin A = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۱۰۵ - پاسخ گزینه‌ی ۳

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی برابر  $(q \neq 1)$  است.  $\frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

$$\left. \begin{aligned} 1 - t + \dots - t^y + t^x &= \frac{1 - (-t)^9}{1 - (-t)} = \frac{1 + t^9}{1 + t} \\ 1 - t^3 + t^6 &= \frac{1 - (-t^3)^3}{1 - (-t^3)} = \frac{1 + t^9}{1 + t^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{t^x - t^y + t^6 + \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{1 + t^9}{1 + t} = \frac{1 + t^3}{1 + t} = 1 - t + t^2$$

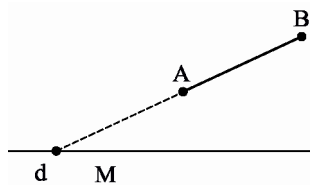
$$= 1 - \left( \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) + \left( \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} \right) = 5$$

۱۰۶ - پاسخ گزینه‌ی ۲

اگر دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  در یک طرف خطی قرار داشته‌باشند و بخواهیم نقطه‌ای روی خط  $d$  در نظر بگیریم، به طوری که تفاضل فواصل آن نقطه از  $A$  و  $B$  بیش‌ترین مقدار را داشته‌باشد، کافی است نقطه‌ی تقاطع خط  $d$  را با امتداد  $AB$



به دست آوریم. (مطابق شکل)



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{4 - 2} = 2 \Rightarrow \text{معادله ی } AB: y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ d: y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x - 1| > |2x| \Rightarrow |2x| + |x - 1| < 5$$

۱۰۷- پاسخ گزینه ی ۳

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 0: -2x - x + 1 < 5 \Rightarrow -3x < 4 \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < x \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 1: 2x - x + 1 < 5 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 1: 2x + x - 1 < 5 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{U} -\frac{4}{3} < x < 2$$

برای به دست آوردن قرینه ی هر نقطه یا منحنی نسبت به نیم سازه ربع اول، کافی است جای  $x$  و  $y$  را با هم

۱۰۸- پاسخ گزینه ی ۲

عوض کنیم.

$$ax + by = 8 \xrightarrow{y=x \text{ به نسبت}} bx + ay = 8$$

این خط باید بر خط  $2x - 3y = b$  مطابقت باشد، پس:

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{-3} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

با استفاده از  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$  و  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$  داریم:

۱۰۹- پاسخ گزینه ی ۴

$$\frac{1}{2}(\sin(4x + 2x) + \sin(4x - 2x)) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

فرض می کنیم  $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \alpha$ ، بنابراین  $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$  و  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  است.

۱۱۰- پاسخ گزینه ی ۱

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(2 \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

با استفاده از  $\cos^p x \sim 1 - p \frac{x^2}{2}$  داریم:

۱۱۱- پاسخ گزینه ی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}} - (\cos \Delta x)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{2\Delta x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \tan\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} x\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} x\right)\right)$$

۱۱۲- پاسخ گزینه ی ۱



$$y' \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} \left( \tan \frac{2\pi}{3} \right) \left( 1 + \tan^2 \frac{2\pi}{3} \right) = 4(-\sqrt{3})(1+3) = -16\sqrt{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{2n-5}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{19}{3(3n+2)} < \frac{1}{100} \Rightarrow 3(3n+2) > 1900 \quad \text{۱۱۳- پاسخ گزینه ۳}$$

$$\Rightarrow 3n+2 \geq 633 \Rightarrow 3n \geq 631 \Rightarrow n \geq 211$$

۱۱۴- پاسخ گزینه ۲ با استفاده از  $[u] \sim u$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \left[ \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x \rightarrow 0^+ \\ -1 & x \rightarrow 0^- \end{cases} \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

۱۱۵- پاسخ گزینه ۱  $k \in \mathbb{Z}$  را در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= (-1)^k \sin k\pi = 0 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= (-1)^k \sin k\pi = 0 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= (-1)^{k-1} \sin k\pi = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در نقاط صحیح پیوسته است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 8)}{x - \sqrt{x^2 + 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4 \quad \text{۱۱۶- پاسخ گزینه ۳}$$

۱۱۷- پاسخ گزینه ۲ در بازه  $(-\infty, 0)$  تابع اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع مشتق زیر محور طول‌ها است، بنابراین گزینه  $(4)$  رد می‌شود. تقعر تابع ابتدا رو به پایین، سپس رو به بالا و بعد رو به پایین است، پس نمودار تابع مشتق، ابتدا نزولی، سپس صعودی و بعد نزولی است، در نتیجه گزینه  $(2)$  درست است.

۱۱۸- پاسخ گزینه ۳ معادله‌ی خطی را که با شیب  $m$  از نقطه‌ی  $A$  می‌گذرد، می‌نویسیم. معادله‌ی تقاطع این خط و منحنی، ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$y - 9 = m(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} y = mx - 2m + 9 \\ y = -x^2 + 2x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (m-2)x - 2m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(-2m+4) = m^2 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -6 \\ m_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{8}{11}$$

۱۱۹- پاسخ گزینه ۱

$$y = \text{gof}(x) = \begin{cases} 3x + 4ax & x \geq 0 \\ \frac{3}{2}x - 2ax & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=0 \text{ پیوسته است.}$$

$$y' = \begin{cases} 3 + 4a & x > 0 \\ \frac{3}{2} - 2a & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_+(0) = y'_-(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$



$$f(4) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(4)} = 3$$

۱۲۰- پاسخ گزینه ۳

$$g(x) = \sqrt{2x} f^{-1}(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} f^{-1}(x) + \sqrt{2x} (f^{-1})'(x)$$

$$\Rightarrow g'(2) = \frac{1}{2} f^{-1}(2) + 2(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}(4) + 2(3) = 8$$

$$f'(x) = (1-4x)e^{x-2x^2} > 0 \Rightarrow 1-4x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4} \quad (I)$$

۱۲۱- پاسخ گزینه ۲

$$f''(x) = -4e^{x-2x^2} + (1-4x)^2 e^{x-2x^2} = ((1-4x)^2 - 4)e^{x-2x^2} < 0 \Rightarrow (1-4x)^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (1-4x)^2 < 4 \Rightarrow |4x-1| < 2 \Rightarrow -2 < 4x-1 < 2 \Rightarrow -1 < 4x < 3 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$$

$$\text{مخرج ریشه‌ی } x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow b + \cos \frac{3\pi}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{\cos 2x}$$

۱۲۲- پاسخ گزینه ۲

ریشه‌های مخرج عبارت‌اند از:

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$a \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow a = 1 \quad \text{در } x = \frac{\pi}{4} \text{ تابع حد دارد، ولی تعریف نشده است. پس باید ریشه‌ی صورت نیز باشد؛ در نتیجه:}$$

$$[1, 3] \quad \text{مقدار میانگین تابع در بازه‌ی } = \frac{1}{3-1} \int_1^3 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} x^2 - \ln x \right) \Big|_1^3$$

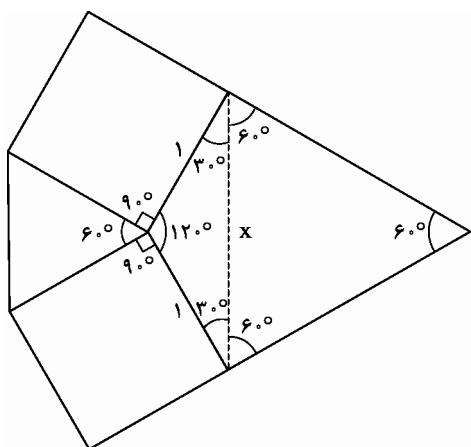
۱۲۳- پاسخ گزینه ۱

$$= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{9}{2} - \ln 3 \right) - \left( \frac{1}{2} - \ln 1 \right) \right) = 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = 2 - \ln \sqrt{3}$$

$$\int_0^9 |\sqrt{x} - 2| dx = \int_0^4 (-\sqrt{x} + 2) dx + \int_4^9 (\sqrt{x} - 2) dx$$

۱۲۴- پاسخ گزینه ۴

$$= \left( -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x \right) \Big|_0^4 + \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x \right) \Big|_4^9 = \left( -\frac{16}{3} + 8 \right) + (18 - 18) - \left( \frac{16}{3} - 8 \right) = \frac{16}{3}$$

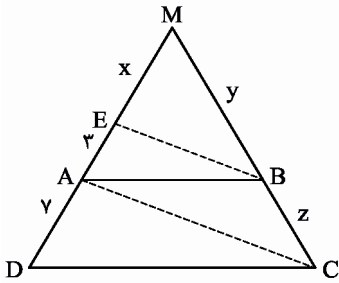
۱۲۵- پاسخ گزینه ۳ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع اول را  $a = 1$  در نظر

می‌گیریم. با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos 120^\circ = 3 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{1} = 3$$



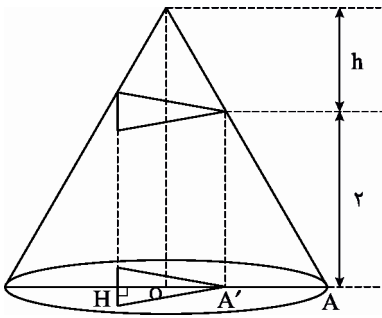
۱۲۶- پاسخ گزینه ۲



$$\left. \begin{aligned} BE \parallel AC &\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{z} \\ AB \parallel CD &\Rightarrow \frac{x+3}{y} = \frac{y}{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{y} \Rightarrow yx = 3x+9 \Rightarrow x = 2/25$$

$$\Rightarrow MD = y + 3 + 2/25 = 12/25$$

۱۲۷- پاسخ گزینه ۳



$$\left. \begin{aligned} OA = R = 3 \\ OA' = \frac{2}{3} A'H \\ A'H = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA' = 1 \Rightarrow \frac{h}{h+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = 1$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع مخروط } H = 3$$

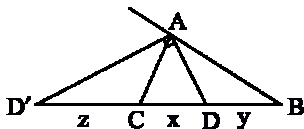
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{\pi}{3} (9)(3) = 9\pi$$

مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی مستطیلی به طول و عرض a و b برابر با

۱۲۸- پاسخ گزینه ۴

$$S = \frac{(11-5)^2}{2} = 18$$

$$S = \frac{(a-b)^2}{2} \text{ است.}$$

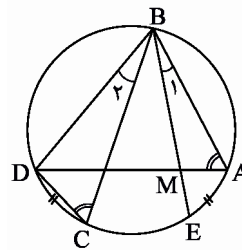


AD و AD' برهم عمودند، پس:  $AD^2 + AD'^2 = DD'^2$

۱۲۹- پاسخ گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} \text{نیم‌ساز داخلی } AD: \frac{x}{y} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x \xrightarrow{x+y=12} x = 3 \\ \text{نیم‌ساز خارجی } AD': \frac{z}{12+z} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow DD'^2 = (x+z)^2 = 9^2 = 81$$

۱۳۰- پاسخ گزینه ۲



$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2} \\ \hat{B}_2 = \frac{\widehat{CD}}{2} \\ \widehat{AE} = \widehat{CD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

$$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{3} = \frac{6}{8} \Rightarrow AM = 2/25$$



۱۳۱- پاسخ گزینهی ۱ راه اول:

$$T_1(x, y) = \left( \frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x = x' \Rightarrow x = \frac{2}{3}x' \\ \frac{3}{2}y = y' \Rightarrow y = \frac{2}{3}y' \end{cases} \xrightarrow{2x+y=6} \frac{4}{3}x' + \frac{2}{3}y' = 6 \Rightarrow 2x' + y' = 9$$

$$T_2(x', y') = \left( \frac{-y'}{x''}, \frac{x'}{y''} \right) \Rightarrow \begin{cases} y' = -x'' \\ x' = y'' \end{cases} \Rightarrow 2y'' - x'' = 9$$

راه دوم: نقطه‌ی  $A(0, 6)$  روی خط  $2x + y = 6$  قرار دارد. مجانس آن به مرکز مبدأ و با ضریب  $\frac{3}{2}$  عبارت است از:

$$T(x, y) = \left( \frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y \right) \Rightarrow T(0, 6) = (0, 9)$$

دوران‌یافته‌ی این نقطه تحت زاویه‌ی  $90^\circ$  حول مبدأ عبارت است از:

$$T'(x, y) = (-y, x) \Rightarrow T(0, 9) = (-9, 0)$$

این نقطه، فقط در گزینه‌ی (۱) صدق می‌کند.

۱۳۲- پاسخ گزینه‌ی ۴ خط گذرا از A و B و خط d متناظرند. زیرا در غیراین‌صورت از آن‌ها یک صفحه می‌گذرد. چون

$d \perp AB$  است. پس این دو خط عمود متناظرند. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشد صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است. بنابراین خط d یا با صفحه‌ی عمودمنصف موازی است که مسأله جواب ندارد و یا خط d روی صفحه‌ی عمودمنصف است که مسأله بی‌شمار جواب دارد.

$$\left. \begin{aligned} V_1 \cdot V_2 = 0 &\Rightarrow 2 - b + a = 0 \\ V_1 \cdot V_3 = 0 &\Rightarrow c - 3 + 2a = 0 \\ V_2 \cdot V_3 = 0 &\Rightarrow 2c + 3b + 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 14, b = 16, c = -25 \Rightarrow a + b + c = 5$$

۱۳۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$(a + b) \times (c + d) = \frac{a \times c}{d \times b} + \frac{a \times d}{c \times b} + \frac{b \times c}{-c \times b} + \frac{b \times d}{-d \times b} = 0 \Rightarrow a + b \parallel c + d$$

۱۳۴- پاسخ گزینه‌ی ۴

۱۳۵- پاسخ گزینه‌ی ۴ کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقاط دو خط متناظر، طول عمود مشترک آن‌هاست. اگر نقاط M و N را روی دو خط

در نظر بگیریم، طول عمود مشترک  $\frac{|MN \cdot u''|}{|u''|}$  است که  $u'' = u \times u'$

$$\left. \begin{aligned} x = y = z &\Rightarrow M(0, 0, 0), u(1, 1, 1) \\ x = -y - 2, z = 5 &\Rightarrow N(0, -2, 5), u'(1, -1, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} MN = (0, -2, 5) \\ u'' = u \times u' = (1, 1, -2) \end{cases}$$

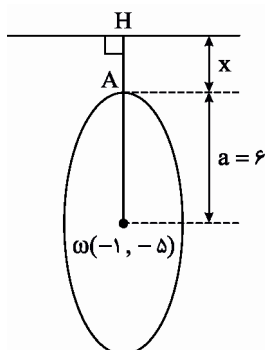
$$\Rightarrow \text{طول عمود مشترک} = \frac{|(0, -2, 5) \cdot (1, 1, -2)|}{|(1, 1, -2)|} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$AM = \frac{2}{3}MH \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{2}{3}|y-4| \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{4}{9}(y-4)^2$$

۱۳۶- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\Rightarrow 9(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 4(y-4)^2 \Rightarrow 9(x+1)^2 + 5y^2 + 5 \cdot y = 55$$

$$\Rightarrow 9(x+1)^2 + 5(y+5)^2 = 180 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{20} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$$



معادله‌ی فوق بیضی قائم است که مرکز آن  $(-1, -5)$  و  $a=6$  است. در شکل زیر کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  از خط  $y=4$  برابر  $x$  است و داریم:

$$x = \omega H - \omega A = 9 - 6 = 3$$

۱۳۷- پاسخ گزینه‌ی ۲  $F'(1-\sqrt{5}, -2)$  و  $F(1+\sqrt{5}, -2)$  کانون‌های هذلولی هستند، پس هذلولی افقی است. مرکز هذلولی وسط  $FF'$  و به مختصات  $(1, -2)$  است.

$$\left. \begin{aligned} 2c = FF' = 2\sqrt{5} &\Rightarrow c = \sqrt{5} \\ 2a = AA' = 2 &\Rightarrow a = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow b = 2$$

در هذلولی افقی مجانب‌ها خطوطی با شیب  $\pm \frac{b}{a}$  هستند که از مرکز هذلولی می‌گذرند.

$$\left. \begin{aligned} m = -\frac{b}{a} = -2 \\ \omega(1, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y + 2x = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix} &= \frac{(2)(3)(x)}{6x} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6x} \begin{vmatrix} 2x^2 & 3x^2 & 6x \\ 18 & 6x & 9x \\ 6x & 12 & 4x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{فکتور}} x \\ \xrightarrow{\text{فکتور}} 3 \\ \xrightarrow{\text{فکتور}} 2 \end{array} \\ = \frac{6x}{6x} \begin{vmatrix} 2x & 3x & 6 \\ 6 & 2x & 3x \\ 3x & 6 & 2x \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6 \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix} = -D \end{aligned}$$

۱۳۸- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$A + B = AB \Rightarrow AB - B = A \Rightarrow (A - I)B = A \Rightarrow B = (A - I)^{-1}A \quad \text{(I)} \quad \text{۱۳۹- پاسخ گزینه‌ی ۱}$$

$$T(x, y) = (2x - y, 3x + y) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\xrightarrow{\text{(I), (II)}} B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

۱۴۰- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} (1) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y - 4z = 5 \end{cases} & (1), (3): 4x - 22y = -2 \Rightarrow 2x - 11y = -1 \\ (2) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x - 8y + z = -2 \end{cases} & (2), (3): 6x - 33y = -3 \Rightarrow 2x - 11y = -1 \\ (3) \begin{cases} x - 8y + z = -2 \end{cases} \end{cases}$$

چون دستگاه حاصل بی‌شمار جواب دارد پس دستگاه اولیه نیز بی‌شمار جواب دارد. یعنی هر سه صفحه (غیرمنطبق) از یک خط می‌گذرند.

۱۴۱- پاسخ گزینه‌ی ۴ مجموع فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است.

$$0/1 + 0/25 + 0/2 + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0/45$$



بهرتر است جدول را با فراوانی مطلق و با تعداد کل داده‌هایی برابر ۱۰۰ در نظر بگیریم.

$f_i$ فراوانی	۱۰	۲۵	۲۰	۴۵
$x_i$	۸	۱۲	۱۶	۲۰
$y_i = x_i - ۱۴$	-۶	-۲	۲	۶

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{-۶۰ - ۵۰ + ۴۰ + ۲۷۰}{۱۰۰} = ۲$$

$$\delta_x^2 = \delta_y^2 = \frac{\sum f_i (y_i - \bar{y})^2}{\sum f_i} = \frac{۱۰(۶۴) + ۲۵(۱۶) + ۲۰(۰) + ۴۵(۱۶)}{۱۰۰} = \frac{۱۷۶۰}{۱۰۰} = ۱۷/۶$$

۱۴۲- پاسخ گزینه‌ی ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) اگر  $x = ۶۴$  باشد،  $x = ۶۴$  مد و داده‌ها به صورت ۷۷، ۷۰، ۶۶، ۶۵، ۶۴، ۶۴، ۶۳، ۵۰ هستند که میانه‌ی آن‌ها برابر

$$\frac{۶۴ + ۶۵}{۲} = ۶۴/۵ \text{ است که برابر مد نمی‌شود.}$$

(۲) اگر  $x = ۶۵$  باشد،  $x = ۶۵$  مد و داده‌ها به صورت ۷۷، ۷۰، ۶۶، ۶۵، ۶۵، ۶۴، ۶۳، ۵۰ هستند که میانه‌ی آن‌ها برابر

$$\frac{۶۵ + ۶۵}{۲} = ۶۵ \text{ است. اگر از همه‌ی داده‌ها ۶۵ را کم کنیم، میانگین داده‌های جدید ۱۲، ۵، ۱، ۰، ۰، -۱، -۲، -۱۵ برابر با}$$

$$\frac{-۱۵ - ۲ - ۱ + ۱ + ۵ + ۱۲}{۸} = ۰ \text{ است، پس میانگین داده‌های اول برابر ۶۵ است که برابر میانه و مد می‌شود.}$$

(۳) اگر  $x = ۶۶$  باشد،  $x = ۶۶$  مد و داده‌ها به صورت ۷۷، ۷۰، ۶۶، ۶۶، ۶۵، ۶۴، ۶۳، ۵۰ هستند که میانه‌ی آن‌ها برابر

$$\frac{۶۵ + ۶۶}{۲} = ۶۵/۵ \text{ است که برابر مد نمی‌شود.}$$

البته بعد از این که فهمیدید گزینه‌ی (۲) درست است، احتیاجی به بررسی گزینه‌ی (۳) نیست.

۱۴۳- پاسخ گزینه‌ی ۳ مجموعه‌ی اعداد دو رقمی،  $\{۹۹, \dots, ۱۱, ۱۰\}$  است که مجموع اعضای مجموعه‌های

$\{۹۹, ۱۱\}$ ،  $\{۹۸, ۱۲\}$ ،  $\dots$ ،  $\{۵۶, ۵۴\}$  برابر ۱۱۰ است که تعداد این مجموعه‌ها برابر ۴۴ است. اگر از هر یک از این مجموعه‌ها یک

عضو و دو عدد ۱۰ و ۵۵ را در نظر بگیریم، جمع هیچ دوتایی ۱۱۰ نمی‌شود، پس با خارج کردن ۴۶ گوی هنوز به منظورمان نرسیده‌ایم، ولی

اگر گوی ۴۷ را بیرون آوریم با یکی از اعداد قبلی مجموعی برابر ۱۱۰ می‌دهد.

۱۴۴- پاسخ گزینه‌ی ۴ با توجه به  $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$  داریم:

$$A \cup B = A \Rightarrow B \subset A \Rightarrow B \cap A' = B - A = \emptyset$$

۱۴۵- پاسخ گزینه‌ی ۲ با توجه به افراز داده‌شده،  $A = \{a, b, \{a, b\}, c\}$  است که ۴ عضو دارد. افرازهایی که مجموعه‌ی تک

عضوی ندارند، به صورت (دو عضوی - دو عضوی) یا (چهار عضوی) هستند که تعداد اولی  $\frac{\binom{۴}{۲}}{۲!} = ۳$  و تعداد دومی  $\binom{۴}{۴} = ۱$ ، پس تعداد

افرازهای مورد نظر ۴ است.

۱۴۶- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = ab \Rightarrow (a, b)R(a, b)$$

- این رابطه بازتابی است، زیرا:

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow ab = cd \Rightarrow cd = ab \Rightarrow (c, d)R(a, b)$$

- این رابطه تقارنی است، زیرا:

$$\left. \begin{aligned} (a, b)R(c, d) &\Rightarrow ab = cd \\ (c, d)R(e, f) &\Rightarrow cd = ef \end{aligned} \right\} \Rightarrow ab = ef \Rightarrow (a, b)R(e, f)$$

- این رابطه تعدی است، زیرا:





$$[(1, 4)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in R(1, 4)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 4\}$$

نیمساز ناحیه‌ی اول ( $y = x (x > 0)$ ) است، با قطع دادن آن‌ها داریم:

$$\left. \begin{matrix} xy = 4 \\ y = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

۱۴۷- پاسخ گزینه‌ی ۴۴۴

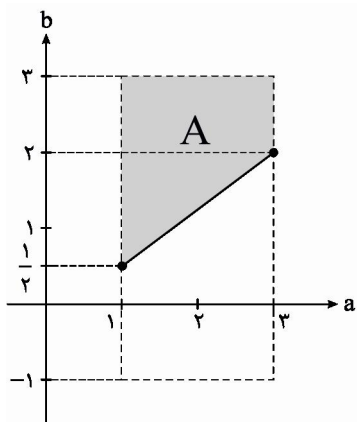
بناشد  $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (6, 5)\} \Rightarrow n(B) = 32$

البته می‌توانید برای تعیین تعداد اعضای  $B$ ، حالتی را که هر دو مضرب ۳ هستند، یعنی  $2 \times 2 = 4$  را از کل حالات ۳۶ کم کنید.

$$A \cap B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 4)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

به نظر می‌آید منظور طراح سؤال احتمال شرطی نبوده‌است، بلکه منظور این بوده‌است که یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد ولی مجموع آن‌ها مضرب ۳ باشد که احتمال برابر  $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$  می‌شود که گزینه‌ی (۱) است.



$$S = \{(a, b) \mid 1 < a < 3, -1 < b < 3\}$$

$$A = \{(a, b) \in S \mid 3a - 4b < 1\}$$

$$S \text{ مساحت ناحیه‌ی } = 2 \times 4 = 8$$

$$A \text{ مساحت ناحیه‌ی } = \frac{\left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{7}{2}}{8} = \frac{7}{16}$$

۱۴۸- پاسخ گزینه‌ی ۳

۱۴۹- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$p + q = 9 \Rightarrow$$

p	q	گراف
۹	۰	ناهمبند
۸	۱	ناهمبند
۷	۲	ناهمبند
۶	۳	ناهمبند
۵	۴	
۴	۵	
۳	۶	وجود ندارد.
۲	۷	وجود ندارد.
۱	۸	وجود ندارد.



۱۵۰- پاسخ گزینهی ۴

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \times 100000^2 + \overline{ab} \times 100000 + \overline{ab} = \overline{ab}(1001001) = \overline{ab}(91 \times 111) \Rightarrow 91\overline{ab} = k^2 \Rightarrow \overline{ab} = 91 \Rightarrow a + b = 10$$

۱۵۱- پاسخ گزینهی ۱

$$(abc)_y = (a \cdot cb)_f \Rightarrow 49a + 7b + c = 64a + 4c + b \Rightarrow 6b - 15a - 3c = 0 \Rightarrow 2b = 5a + c$$

چون  $a, b, c$  مخالف صفر هستند. در نتیجه  $1 \leq a, b, c \leq 3$ . بنابراین تنها جواب معادله‌ی فوق  $a = c = 1$  و  $b = 3$  و  $a + b + c = 5$  است.

۱۵۲- پاسخ گزینهی ۱ فرض می‌کنیم  $d = (13n - 3, 5n + 4)$  باشد.

$$\begin{cases} d \mid 5n + 4 \Rightarrow d \mid 65n + 52 \\ d \mid 13n - 3 \Rightarrow d \mid 65n - 15 \end{cases} \Rightarrow d \mid 67 \xrightarrow{d \neq 1} d = 67 \Rightarrow 67 \mid 5n + 4$$

$$\Rightarrow 5n + 4 \equiv 0 \pmod{67} \xrightarrow{\times 27} 135n + 108 \equiv 0 \pmod{67} \Rightarrow n - 26 \equiv 0 \pmod{67} \Rightarrow n = 67k + 26 \xrightarrow{n \text{ دورقمی}} n = 26, 93$$

۱۵۳- پاسخ گزینهی ۴

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \Rightarrow M(ROR) = M^{(2)}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \Rightarrow \text{این ماتریس } 12 \text{ درایه‌ی } 1 \text{ دارد.}$$

۱۵۴- پاسخ گزینهی ۳ راه اول: جواب‌های معادله را می‌نویسیم.

$$x_1 = 5 \Rightarrow x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)$$

$$x_1 = 6 \Rightarrow x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$$

$$x_1 = 7 \Rightarrow x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$$

$$x_1 = 8 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$$

$$x_1 = 9 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow (0, 2), (1, 1), (2, 0)$$

$$x_1 = 10 \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow (0, 1), (1, 0)$$

$$x_1 = 11 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

تعداد کل جواب‌ها برابر ۲۵ است.

راه دوم: فرض می‌کنیم مجموعه‌ی  $A$  جواب‌هایی از معادله باشد که  $x_1 \geq 5$  و  $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$  است.  $t_1 = x_1 - 5 \geq 0$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین تعداد اعضای  $A$  عبارتند از:

$$t_1 + 5 + x_2 + x_3 = 11 \Rightarrow t_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{8}{6} = 28$$

اکنون فرض می‌کنیم  $B$  جواب‌هایی از معادله باشد که  $x_1 \geq 5$  و  $x_2 \geq 0$  و  $x_3 \geq 5$  است.  $t_1 = x_1 - 5 \geq 0$  و  $t_3 = x_3 - 5 \geq 0$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین تعداد اعضای  $B$  عبارتند از:

$$t_1 + 5 + x_2 + t_3 + 5 = 11 \Rightarrow t_1 + x_2 + t_3 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{3}{1} = 3$$

جواب‌های مورد نظر برابر است با:  $28 - 3 = 25$



۱۵۵- پاسخ گزینه ی ۲ چون رنگ ۲ مهره ی اول را نمی دانیم مثل این است که مهره ی بعدی را از همان جعبه ی اول بیرون

$$p(\text{سفید}) = \frac{۳}{۷}$$

آورده ایم، بنابراین:

- در درس پایه، سؤالات ترکیبی، محاسبه ای و وقت گیر هستند.
- در درس دیفرانسیل، سؤالات معقول هستند.
- در درس هندسه ی پایه، به غیر از یک سؤال، بقیه معمولی هستند.
- در درس هندسه ی تحلیلی، سؤالات محاسبه ای هستند و یک سؤال برگرفته از یکی از تمرین های سخت کتاب است.
- در درس آمار، سؤالات محاسبه ای و وقت گیر هستند.
- در درس جبر و احتمال، سؤالات از حد متوسط بالاتر است.
- در درس گسسته، به غیر از دو سؤال وقت گیر، بقیه خوب هستند.
- در مجموع به نسبت سال های گذشته سؤالات سنگین ترند و محاسبات زیادی را می طلبند، بنابراین انتخاب سؤالات ساده و متوسط یکی از عوامل بالارفتن درصد شما در این آزمون است.

**مهندس رامین منوری**

**مهندس علی رضا شریف خمیلی**

**مهندس عماد صادقی**