اعداد اول (Prime)

هر عدد طبیعی غیر از ۱ را که جز بر یک و خودش، بر هیچ عدد طبیعی دیگری تقسیم‌پذیر نباشد عدد اول گویند و هر عدد طبیعی به‌جز ۱ را که اول نیست عدد مرکب می‌نامند، (عدد یک نه اول است و نه مرکب)

مثال: اعداد ۵، ۷ و ... اول و اعداد ۴، ۶، ۸، ۹ و ۱۰ مرکب هستند.

مسئله: ثابت کنید هر عدد به صورت $۲۷^n + ۱$ و $n \geq ۱$ اول نیست.

پاسخ:

$$۲۷^n + ۱ = (۳^۳)^n + ۱ = (۳^n)^۳ + ۱^۳ \Rightarrow ۳^n + ۱ \mid ۲۷^n + ۱$$

پس $۲۷^n + ۱$ علاوه بر خودش و ۱ بر عدد $۳^n + ۱$ هم بخش‌پذیر است پس دیگر عدد اول نیست.

مسئله: اگر m و n طبیعی باشند و $۹m^۲ - ۴n^۲ = ۱۷$ باشد m و n را بیابید.

پاسخ: در این‌گونه مسائل سعی می‌کنیم عبارت را به صورت تجزیه و حاصل‌ضرب ۲ عبارت بنویسیم و از متحد قراردادن طرفین مجهول‌ها را پیدا کنیم.

$$۹m^۲ - ۴n^۲ = ۱۷ \Rightarrow (۳m - ۲n)(۳m + ۲n) = ۱ \times ۱۷ \Rightarrow \begin{cases} ۳m - ۲n = ۱ \\ ۳m + ۲n = ۱۷ \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$۶m = ۱۸ \Rightarrow m = ۳ \Rightarrow n = ۴$$

چون ۱۷ عدد اول است پس فقط به صورت ۱×۱۷ به حاصل‌ضرب ۲ عدد تبدیل می‌شود.

تست: اگر $۱۷p + ۱$ مربع کامل باشد، چند عدد اول p در آن صدق می‌کند؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴) بی‌شمار**

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$۱۷p + ۱ = x^۲ \Rightarrow ۱۷p = x^۲ - ۱ \Rightarrow ۱۷p = (x - ۱)(x + ۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = p \quad (۱) \\ x + ۱ = ۱۷ \Rightarrow x = ۱۶ \xrightarrow{(۱)} p = ۱۵ \quad \text{غیرقابل قبول چون اول نیست} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۱۷ \Rightarrow x = ۱۸ \xrightarrow{(۲)} p = ۱۹ \Rightarrow \quad p \text{ اول است} \Rightarrow \text{یک جواب داریم} \\ x + ۱ = p \quad (۲) \end{cases}$$

مسئله: تفاضل مربعات دو عدد طبیعی یک عدد اول است آن دو عدد همواره ..... .

۱) غیراولند **۲) متوالیند** **۳) لااقل یکی اول است** **۴) هر دو اولند**

پاسخ: گزینه‌ی ۲

اگر عدد اول را p فرض کنیم داریم:

$$x^۲ - y^۲ = p \Rightarrow (x - y)(x + y) = p \times ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۱ \Rightarrow \quad \text{پس دو عدد که اختلاف یک دارند متوالیند.} \\ x + y = p \end{cases}$$

تست: اگر p، a و b سه عدد اول باشند و $p = a^۳ - b^۳$ مقدار abp کدام است؟

۱) $\frac{p^۲ - ۱}{۲}$ **۲)** $\frac{(p + ۱)^۲}{۳}$ **۳)** ۱۱۴ **۴)** ۲۲۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\underbrace{p}\times\underbrace{۱}=\underbrace{(a-b)}(\underbrace{a^{۲}+ab+b^{۲}}) \Rightarrow \begin{cases} a-b=۱ \\ a^{۲}+ab+b^{۲}=p \end{cases}$$

چون p یک عدد اول است و از ۱ بیش‌تر است باید عبارت بزرگ‌تر مساوی p باشد و عبارت کوچک‌تر مساوی یک.

$a-b=۱ \Rightarrow$ **تنها دو عدد اولی هستند که یکی اختلاف دارند** $b=۲$ و $a=۳ \Rightarrow p=a^{۲}+b^{۲}+ab=۴+۹+۶=۱۹$

$\Rightarrow abp=۳\times۲\times۱۹=۱۱۴$

تست: اگر p عددی اول باشد و $p \mid p^{۲}+p+۲۲!$ چند مقدار متمایز برای p وجود دارد؟

۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۲۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$\left.\begin{matrix} \text{بدیهی است:}\begin{cases} p \mid p^{۲} \xrightarrow{+} p \mid p^{۲}+p \\ p \mid p \end{cases} \\ \text{طبق فرض:}\ p \mid p^{۲}+p+۲۲! \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} p \mid ۲۲!$$

چون p عددی اول است پس p فقط می‌تواند اعداد اول کم‌تر از ۲۲ باشد یعنی $p\in\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$ که ۸ مقدار دارد.

تنها عدد اول زوج ۲ است.

تست: اگر a، b و c سه عدد اول باشند به‌طوری‌که $a+b+c=۸۴$ باشد و $(a<b<c)$ حاصل $\dfrac{b+c}{a}$ کدام‌است؟

۱) عددی زوج　　۲) عددی اول　　۳) مضرب ۳　　۴) مربع کامل

پاسخ: گزینه‌ی ۲

چون اعداد اول به غیر از ۲ فرد هستند و جمع سه عدد فرد عددی فرد می‌شود پس با توجه به زوج‌شدن مجموع a، b و c یکی از آن‌ها زوج است که فقط ۲ در اعداد اول زوج است پس:

$$a+b+c=۸۴ \xrightarrow{a=۲} b+c=۸۲ \Rightarrow \frac{b+c}{a}=\frac{۸۲}{۲}=۴۱ \Rightarrow \text{۴۱ عددی اول است}$$

تست: اگر حاصل‌ضرب اعداد اول بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ را با عدد یک جمع کنیم، عدد حاصل:

۱) یک عامل اول بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ دارد.　　۲) به صورت ۲^{n} است.

۳) یک عامل اول کم‌تر از ۱۰۰ دارد.　　۴) به صورت $۲^{n}+۱$ نوشته می‌شود.

پاسخ: گزینه‌ی ۳

اعداد اول بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ همگی فردند و حاصل‌ضرب آن‌ها نیز فرد خواهدشد و هنگامی‌که با عدد یک جمع می‌کنیم حاصل زوج می‌شود و بر ۲ که یک مقسوم علیه اول (عامل اول) کم‌تر از ۱۰۰ است بخش‌پذیر است.

اگر به حاصل‌ضرب اعداد اول کوچک‌تر از n یک واحد اضافه کنیم عدد حاصل اول است یا در صورت مرکب بودن دارای مقسوم‌علیه اول بزرگ‌تر از n می‌باشد. (اثبات از روش برهان خلف)

تست: اگر به حاصل‌ضرب اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ یک واحد اضافه کنیم عدد حاصل دارای چه تعداد مقسوم‌علیه غیر از یک و کم‌تر از ۱۰۰ است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$\overbrace{(۲\times ۳\times ...\times ۹۷)}^{\text{اعداد اول از یک تا ۱۰۰}}+۱=k$$

مطابق نکته قبل عدد حاصل یعنی k اگر اول باشد بر یک و خودش بخش‌پذیر است چون در صورت سؤال گفته‌شده غیر از ۱ پس عدد ۱ به عنوان مقسوم‌علیه پذیرفته نیست. هم‌چنین k بیش‌تر از ۱۰۰ است پس خود عدد نیز به عنوان مقسوم‌علیه پذیرفته نیست (چون تعداد مقسوم‌علیه‌های کم‌تر از ۱۰۰ را خواسته‌اند و اگر عدد حاصل مرکب باشد باید مطابق نکته قبل مقسوم‌علیه اول بیش‌تر از ۱۰۰ داشته باشیم که باز در صورت سؤال تعداد مقسوم‌علیه‌های کم‌تر از ۱۰۰ را خواسته‌اند پس این عدد هیچ مقسوم‌علیهی با شرایط داده‌شده ندارد.

قضیه: هر عدد صحیح به جز ۱ و ۱− حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد.

اثبات: عدد صحیح مورد نظر را a می‌نامیم اگر $a=۰$ باشد بر هر عدد اولی بخش‌پذیر است پس بی‌شمار مقسوم‌علیه اول دارد. اگر $a\neq ۰$ باشد فرض کنیم S مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌تر از ۱ عدد a باشد.

$$S=\{n:n>۱\,,\,n|a\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a|a \;\Rightarrow\; S\neq\varnothing \\ S\subset\mathbb{N}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ دارد. m عضو ابتدایی مانند S بنا به اصل خوشترتیبی $\Rightarrow$ m عددی اول است زیرا در غیر این صورتدارای مقوسوم علیه مانند ۹ است

برهان خلف: m **دارای مقسوم علیهی مانند q است و داریم:**

$$\left.\begin{array}{l} q|m\,,\,q>۱ \\ m|a\end{array}\right\}\Rightarrow\; q|a\,,\,q>۱\xrightarrow{q\text{ شرایط مجموعه } S \text{ را دارد}} q\in S$$

از طرفی چون $q|m$ پس $q<m$ است. این مطلب با عضو ابتدا بودن m در تناقض است پس m اول است.

قضیه: بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

اثبات: (برهان خلف) فرض کنید $p_۱$ و $p_۲$ و ... و p_n تنها اعداد اولی باشند که می‌شناسیم عدد M را به‌صورت ابتکاری به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$M=(p_۱\times p_۲\times ...\times p_n)+۱$$

چون $M>p_n$ پس M در بین اعداد اول $p_n\,,\,...\,,\,p_۲\,,\,p_۱$ نیست، پس M عددی مرکب است، پس بنا به قضیه قبل M دارای حداقل یک مقسوم‌علیه اول است که نام آن را p_j می‌گذاریم، پس p_j یکی از اعداد اول از $p_۱$ تا p_n است داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p_j|M \;\Rightarrow\; p_j\big|(p_۱\times p_۲\times ...\times p_j\times ...\times p_n)+۱ \\ \text{از طرف بدیهی است که: } p_j\big|p_۱\times p_۲\times ...\times p_j\times ...\times p_n\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفریق}} p_j|۱\;\Rightarrow\; p_j=۱$$

و این مطلب با عدد اول بودن p_j تناقض دارد و فرض خلف باطل بوده پس تعداد اعداد اول نامتناهی است.

قضیه: اگر n یک عدد مرکب باشد، آن‌گاه n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ یا مساوی با آن دارد.

اثبات:

n مرکب است پس به شکل حاصل‌ضرب حداقل ۲ عدد تبدیل می‌شود. $\Rightarrow\; n=a\times b\quad (۱<\underbrace{a\leq b}_{\text{خودمان فرض می‌کنیم}}<n)$

$$a\leq b\xrightarrow{\times a} a^۲\leq ab\;\Rightarrow\; a^۲\leq n\;\Rightarrow\; a\leq\sqrt{n}\quad (۱)$$

$a>۱\;\Rightarrow$ مطابق قضایای قبل a مقسوم‌علیه اولی مانند p دارد $\;\Rightarrow\; p|a\;\Rightarrow\; p\leq a\quad (۲)$

پس n دارای مقسوم‌علیه اولی مانند p است. به‌طوری‌که این مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر و مساوی $\sqrt{n}$ است. $(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} p \le \sqrt{n} \\ p|n \end{cases} \Rightarrow$

پس برای تشخیص اول یا مرکب بودن هر عدد می‌توان از قضیه قبل کمک گرفت.

مسئله: آیا ۱۲۳ عددی اول است.

پاسخ:

چون $\sqrt{۱۲۳} \simeq ۱۱$ کافی‌است ۱۲۳ را فقط بر اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی ۱۱ تقسیم کنیم چون:

$۲\nmid ۱۲۳$, $۳\nmid ۱۲۳$, $۵\nmid ۱۲۳$, $۷\nmid ۱۲۳$ و $۱۱\nmid ۱۲۳$ پس ۱۲۳ عددی اول است.

تست: حداقل چندبار عمل تقسیم لازم است تا ثابت کنیم ۹۶۷ عددی اول است؟

۱) ۹ **۲)** ۱۰ **۳)** ۱۱ **۴)** ۳۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳

مطابق قضیه قبل باید دست‌کم و اجباراً ۹۶۷ را به اعداد کوچک‌تر و مساوی جذرش تقسیم کنیم چون $\sqrt{۹۶۷} \simeq ۳۱$ پس ۹۶۷ را بر اعداد اول مقابل تقسیم می‌کنیم که تعداد آن‌ها ۱۱ تا می‌باشد. $\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱\}$

تست: در فاصله $[۱۰۰!+۲ , ۱۰۰!+۹۹]$ چند عدد غیر اول داریم؟

۱) ۹۹ **۲)** ۹۸ **۳)** صفر **۴)** $۱۰۰!$

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$۱۰۰!$ بر تمام اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ بخش‌پذیر است چون:

$۱۰۰! = ۱۰۰ \times ۹۹ \times ۹۸ \times ... \times ۲ \times ۱$

$۱۰۰!+۲ = ۲k+۲ = ۲(k+۱) = ۲k' \Rightarrow$ $۱۰۰!+۲$ عددی اول نیست

$۱۰۰!+۳ = ۳k+۳ = ۳(k+۱) = ۳k' \Rightarrow$ $۱۰۰!+۳$ عددی اول نیست

$\vdots$

$۱۰۰!+۹۹ = ۹۹k+۹۹ = ۹۹k' \Rightarrow$ $۱۰۰!+۹۹$ عددی اول نیست

پس هیچ‌کدام از اعداد داخل این بازه بسته اول نیستند و همگی مرکبند و تعداد آن‌ها برابر است با: $۹۹-۲+۱ = ۹۸$

هر عدد اول غیر از ۲ و ۳ به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ نوشته می‌شود که به صورت $۶k \pm ۱$ نیز نمایش می‌دهیم.

اثبات: مطابق الگوریتم تقسیم هر عدد طبیعی را می‌توان به یکی از ۶ صورت $۶k$، $۶k+۱$، $۶k+۲$، $۶k+۳$، $۶k+۴$ و $۶k+۵$ نوشت که از بین آن‌ها $۶k$ مضرب ۶ و $۶k+۲$ و $۶k+۴$ مضرب ۲ و $۶k+۳$ مضرب ۳ هستند و فقط $۶k+۱$ و $۶k+۵$ که به فرم $۶k-۱$ نیز نوشته می‌شود می‌توانند اول باشند.

عکس مطلب قبل همواره صحیح نیست یعنی هر عدد به شکل $۶k \pm ۱$ ممکن است عدد اول نباشد مثلاً به‌ازای $k = ۲۰$ داریم $۶k+۱ = ۱۲۱$ که اول نیست.

مسئله: اگر $p \ge ۵$ یک عدد اول باشد ثابت کنید: $۲۴ | p^۲ - ۱$.

پاسخ:

$p \ge ۵$ اول $\xrightarrow{\text{مطابق نکته قبل}} p = ۶k \pm ۱ \Rightarrow p^۲ - ۱ = ۳۶k^۲ \pm ۱۲k + ۱ - ۱ = ۳k' \Rightarrow$ $p^۲ - ۱$ مضرب ۳ است. (۱)

$p \geq 5$ اول $\Rightarrow$ p فرد است $\xrightarrow[\text{نوشته می‌شود.}\ 8k+1]{\text{مربع هر عدد فرد به فرم}}$ $p^2 = 8k+1 \Rightarrow p^2 - 1 = 8k \Rightarrow$ $p^2 - 1$ مضرب ۸ است. (۲)

$\xrightarrow{(2),(1)}$ $p^2 - 1$ مضرب ۲۴ می‌باشد.

تست: تعداد سه‌تایی‌های مرتب به صورت p و $p+2$ و $p+4$ که هر سه مؤلفه آن اول باشند کدام‌است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱

اگر $p = 2$ باشد سه عدد ۲ و ۴ و ۶ هیچ‌کدام اول نیستند.

اگر $p = 3$ باشد سه عدد ۳، ۵ و ۷ هر سه اول هستند و این تنها جواب مسئله است که هر سه مؤلفه p، $p+2$ و $p+4$ به‌ازای آن اول می‌شوند.

اثبات منحصر به‌فرد بودن:

هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو فرم مقابل است. $\Rightarrow \begin{cases} 6k+1 \Rightarrow (p, p+2, p+4) = (6k+1, \underbrace{6k+3}_{\text{مضرب ۳ است پس اول نیست.}}, 6k+5) \\ \\ 6k-1 \Rightarrow (p, p+2, p+4) = (6k-1, 6k+1, \underbrace{6k+3}_{\text{مضرب ۳ است پس اول نیست.}}) \end{cases}$

ملاحظه می‌شود در هر دو حالت $6k+1$ و $6k-1$ یکی از ۳ مؤلفه اول نیست.

اگر $p \neq 3$ عددی اول باشد آن‌گاه p به صورت $3k \pm 1$ نیز نوشته می‌شود ولی در بیش‌تر مسائل از نکته قبل استفاده می‌کنیم که اعداد اول به فرم $6k \pm 1$ نوشته می‌شوند.

تست: به‌ازای چند عدد اول p، $7p^2 - 4$ عددی اول است؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴) بی‌شمار**

پاسخ: گزینه‌ی ۲

اگر $\begin{cases} p = 3 \Rightarrow (7 \times 9) - 4 = 59 \ \text{عددی اول است} \\ p > 3 \xrightarrow{\text{نکته قبل}} 7(3k \pm 1)^2 - 4 = 7(9k^2 \pm 6k + 1) - 4 = 7(3k' + 1) - 4 = 21k' + 3 = 3q \ \text{همیشه عددی مرکب است} \end{cases}$

پس فقط یک عدد اول مورد قبول است.

تست: چند عدد اول کوچک‌تر از ۱۳۹۱ وجوددارد که مجموع ارقامش سه شود؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** ۱۳۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲

تنها عدد اول که این شرط را دارد عدد ۳ است، چون اگر مجموع ارقام عددی ۳ شود مانند ۱۰۰۰۱۱ بر عدد ۳ بخش‌پذیر می‌شود و دیگر اول نیست.

قضیه بنیادی حساب

فرض کنید a عدد طبیعی و مخالف ۱ باشد، در این صورت می‌توان a را به صورت منحصر به‌فرد بـه شـکل حاصل‌ضـرب اعـداد اول نوشت یعنی a را می‌توان به صورت $a = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$ نوشت $(\alpha_i \in N)$

کتاب درسی از نماد $\prod\limits_{P}$ به مفهوم ضرب روی تمام اعداد اول استفاده کرده‌است. و تجزیه عدد n را بـه صـورت زیـر نیـز نمایش داده‌است:

$$n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$$

مثال: عدد ۴۴۰۰ را تجزیه کنید.

پاسخ: هر صفر به منزله یک عامل ۲ و ۵ است یعنی $۴۴۰۰ = ۴۴ \times ۲^۲ \times ۵^۲$ حال عدد ۴۴ را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم به ایـن منظـور به اعداد اول از ۲ به بعد تقسیم و تفکیک می‌کنیم.

$$۴۴۰۰ = ۱۱ \times ۵^۲ \times ۲^۴$$

$$\begin{array}{r|l} ۴۴ & ۲ \\ ۲۲ & ۲ \\ ۱۱ & ۱۱ \\ ۱ & \end{array}$$

کاربردهای قضیه بنیادی حساب

(کاربرد اول): محاسبه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) و کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

پس از آن‌که اعداد را به عوامل اول تجزیه کردیم برای محاسبه ب.م.م، عوامل مشترک را با توان کم‌تر انتخاب می‌کنیم و برای محاسـبه ک.م.م تمام عوامل (مشترک و غیرمشترک) را با بیش‌ترین توان انتخاب می‌کنیم.

نماد ب.م.م دو عدد a و b به صورت $a \prod b$ یا $(a\ ,\ b)$ و نمـاد ک.م.م دو عـدد a و b بـه‌صـورت $a \coprod b$ یـا $[a\ ,\ b]$ می‌باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۷۷۰۰ و ۳۵۰۰.

پاسخ:

$$\begin{cases} ۷۷۰۰ \prod ۳۵۰۰ = (۷ \times ۱۱ \times ۲^۲ \times ۵^۲) \prod (۷ \times ۵^۳ \times ۲^۲) = ۷ \times ۲^۲ \times ۵^۲ = ۷۰۰ \\ ۷۷۰۰ \coprod ۳۵۰۰ = (۷ \times ۱۱ \times ۲^۲ \times ۵^۲) \coprod (۷ \times ۵^۳ \times ۲^۲) = ۱۱ \times ۷ \times ۵^۳ \times ۲^۲ = ۳۸۵۰۰ \end{cases}$$

تست: اگر ک.م.م دو عدد $A = ۷^۲ \times ۵ \times ۳^۲ \times ۲^۲$ و B مساوی $D = ۷^۲ \times ۵^۲ \times ۳^۲ \times ۲^۲$ باشد مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دو رقمـی برای B کدام‌است؟

۱) ۹ **۲)** ۷ **۳)** ۱۲ **۴)** ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۳

از مقایسه ک.م.م و عدد A می‌توان فهمید که عدد B اجباراً باید عامل $۵^۲$ را داشته باشد چون در ک.م.م آمده ولی در A موجود نیست ولی عوامل مشترک دیگر به صورت دلخواه است پس B مضرب ۲۵ است. یعنی: $B \in \{۲۵, ۵۰, ۷۵, ۱۰۰, ...\}$ و بزرگ‌ترین عدد دو رقمی ممکن ۷۵ است و مجموع ارقام آن ۱۲ می‌باشد.

تست: به ازای چند عدد طبیعی a، $[a, ۳۰] = ۵۴۰$ می‌شود؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۴ **۴)** بی‌شمار

پاسخ: گزینه‌ی ۲

با توجه به تجزیه دو عدد به صورت مقابل و مفهوم ک.م.م که باید همه عوامل با توان‌های بیش‌تر انتخاب شود می‌توانیم مقدار a را به صورت $a = ۲^۲ \times ۳^۳ \times ۵^x$ در نظر بگیریم که در آن $x = ۰$ و $x = ۱$ می‌تواند در نظر گرفته شود پس ۲ مقدار برای a وجود دارد.

$$\begin{cases} ۵۴۰ = ۲^۲ \times ۳^۳ \times ۵ \\ ۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \end{cases}$$

(کاربرد دوم): پیدا کردن تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت یک عدد طبیعی

اگر عدد a را به صورت $a = P_۱^{\alpha_۱} P_۲^{\alpha_۲} ... P_n^{\alpha_n}$ به عوامل اول تجزیه کنیم تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد a با استفاده از اصل ضرب با دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$d(a) = (\alpha_۱ + ۱)(\alpha_۲ + ۱)...(\alpha_n + ۱)$$

مثال: تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی و صحیح عدد ۱۲۰ را بیابید.

پاسخ:

$۱۲۰ = ۲^۳ \times ۵^۱ \times ۳^۱ \Rightarrow d(۱۲۰) = (۳+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۱۶$:تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت

$\Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح $= ۲ \times ۱۶ = ۳۲$ (هر عدد طبیعی به هر عددی که بخش‌پذیر باشد به قرینه آن عدد نیز بخش‌پذیر است)

تست: عدد $۲^{۲\alpha} \times ۵^{\beta}$ دارای ۱۴ مقسوم‌علیه مثبت است، α کدام‌است؟ $(\alpha, \beta \in N)$

۱) ۲ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$(۲\alpha + ۱)(\beta + ۱) = ۷ \times ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲\alpha + ۱ = ۷ \Rightarrow \alpha = ۳ \\ \beta + ۱ = ۲ \Rightarrow \beta = ۱ \end{cases}$$

در صورت انتخاب حالت‌های دیگر α و β طبیعی نخواهندشد.

تست: تفاضل تعداد مقسوم‌علیه‌های دو عدد طبیعی $N = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}$ و $\frac{N}{۳۶}$ برابر ۱۴ است، کوچک‌ترین عدد N کدام‌است؟

۱) ۱۴۴ **۲)** ۲۱۶ **۳)** ۲۸۸ **۴)** ۴۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$d(N) = (\alpha + ۱)(\beta + ۱)$$

$$\frac{N}{۳۶} = \frac{۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}}{۲^۲ \times ۳^۲} = ۲^{\alpha - ۲} \times ۳^{\beta - ۲} \Rightarrow d\left(\frac{N}{۳۶}\right) = (\alpha - ۲ + ۱)(\beta - ۲ + ۱) = (\alpha - ۱)(\beta - ۱)$$

$$\Rightarrow (\alpha + ۱)(\beta + ۱) - (\alpha - ۱)(\beta - ۱) = ۱۴ \Rightarrow \alpha + \beta = ۷$$

چون کوچک‌ترین مقدار N مورد نظر است لذا باید β کوچک‌ترین مقدار ممکن را اختیار کند، پس $\alpha=۵$ و $\beta=۲$ بنابراین:

$$N=۲^{۵}\times ۳^{۲}=۲۸۸$$

چون عدد $\frac{N}{۳۶}$ طبیعی است پس N باید بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد بنابراین $\alpha\,,\beta\geq ۲$.

تست: چند عدد مثبت a مضرب ۱۸ داریم که $a|۲۷۰۰$؟ (آزاد - ۸۵)

۱) ۶ **۲)** ۱۲ **۳)** ۱۸ **۴)** ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$a=۱۸k \Rightarrow ۱۸k|۲۷۰۰ \xrightarrow{\div ۱۸} k|۳\times ۲\times ۵^{۲} \Rightarrow$$

k مقسوم‌علیه ۱۵۰ است و تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۵۰ برابر است با: $۱۲=(۱+۱)(۲+۱)(۱+۱)$

تست: کوچک‌ترین عددی که مضرب ۶۰ بوده و دارای ۴۲ مقسوم‌علیه مثبت باشد کدام‌است؟

۱) ۳۶۰۰ **۲)** ۲۸۸۰ **۳)** ۴۵۰۰ **۴)** ۲۵۲۰

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم عدد موردنظر مضرب ۶۰ است پس $A=۶۰k$. برای آن‌که A حداقل شود سعی می‌کنیم برای k نیز حداقل عوامل اول با توان‌های کم‌تر را در نظر بگیریم به همین منظور برای k همان عوامل ۲، ۳ و ۵ یعنی عوامل ۶۰ را درنظر می‌گیریم.

$$A=۶۰k=۲^{۲}\times ۵\times ۳\times k=۲^{۲}\times ۵\times ۳\times ۲^{a}\times ۳^{b}\times ۵^{c}=۲^{a+۲}\times ۳^{b+۱}\times ۵^{c+۱}$$

برای آن‌که A حداقل مقدار خود را داشته‌باشد، توان‌های بیش‌تر را به پایه‌های کم‌تر اختصاص می‌دهیم.

$$۴۲=۷\times ۳\times ۲=(a+۲+۱)(b+۱+۱)(c+۱+۱)$$

$$\begin{cases} a+۳=۷ \\ b+۲=۳ \\ c+۲=۲ \end{cases} \Rightarrow A_{min}=۲^{۶}\times ۳^{۲}\times ۵^{۱} \Rightarrow A_{min}=۲۸۸۰$$

مثال: تعداد مقسوم‌علیه‌هایی از عدد ۱۲۰۰ را که بر ۱۵ بخش‌پذیرند بیابید.

پاسخ: اگر ۱۲۰۰ را تجزیه کنیم داریم $۳\times ۵^{۲}\times ۲^{۴}=۱۲۰۰$ و هم‌چنین تجزیه ۱۵ به صورت ۳×۵ می‌باشد. باید فرم هر مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ را که بر ۴۵ قابل قسمت است پیدا کنیم.

اگر a یکی از مقسوم‌علیه‌های به این فرم باشد باید $a|۱۲۰۰$، پس از تجزیه a به فرم $۲^{\alpha}\times ۵^{\beta}\times ۳^{\gamma}$ داریم:

$$(۱)\quad a=۲^{\alpha}\times ۵^{\beta}\times ۳^{\gamma}\,\Big|\,۲^{۴}\times ۵^{۲}\times ۳ \Rightarrow \begin{cases} \alpha\leq ۴ \\ \beta\leq ۲ \\ \gamma\leq ۱ \end{cases}$$

$$(۲)\quad ۱۵|a \Rightarrow ۳\times ۵|a \Rightarrow ۳\times ۵\,\Big|\,۲^{\alpha}\times ۵^{\beta}\times ۳^{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\geq ۰ \\ \beta\geq ۱ \\ \gamma\geq ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} ۰\leq \alpha\leq ۴\,,\ ۱\leq \beta\leq ۲\,,\ ۱\leq \gamma\leq ۱$$

پس برای α، β و γ به ترتیب ۵، ۲ و ۱ مقدار انتخاب وجوددارد، پس طبق اصل ضرب a را به $۵\times ۲\times ۱=۱۰$ طریق می‌توانیم بسازیم پس ۱۰ مقسوم‌علیه مثبت از ۱۲۰۰ بر ۱۵ بخش‌پذیر است.

تست: دو عدد $A=2^3\times 3^4\times 5^3\times 7^2$ و $B=2^5\times 3^2\times 5^\alpha\times 11$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر یک می‌باشند. تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد کدام‌است؟ *(سراسری ۹۰ خارج کشور)*

۱) ۳۶ **۲)** ۴۸۰ **۳)** ۵۴۰ **۴)** ۷۲۰

پاسخ: گزینه ۴

مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد A و B به فرم $2^3\times 3^2\times 5^k$ $(k=\min\{\alpha , 3\})$ هستند از طرفی تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت (به همراه عدد یک) این دو عدد ۲۴ است پس:

$$(3+1)(2+1)(k+1)=24 \Rightarrow k=1$$

از طرفی k کم‌ترین مقدار بین α و ۳ بوده‌است پس $\alpha=1$ می‌باشد.

$$[A , B]=2^5\times 3^4\times 5^3\times 7^2\times 11 \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت}=(5+1)(4+1)(3+1)(2+1)(1+1)=720$$

(کاربرد سوم): بیش‌ترین توان عامل اول P در تجزیه !n

اگر a عددی طبیعی و P یکی از عوامل اول عدد a باشد برای محاسبه حداکثر توان عامل اول P در تجزیه !a از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{حداکثر توان } p=\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\ldots$$

این دستور به نام قانون چیشهف معروف است.

مثال: بزرگ‌ترین مقدار k از رابطه $7^k|110!$ را بیابید.

پاسخ:

$$\text{بیش‌ترین توان } 7=\left[\frac{110}{7}\right]+\left[\frac{110}{7^2}\right]+\underbrace{\left[\frac{110}{7^3}\right]+\ldots}_{0}=15+2=17$$

می‌توانیم از نماد (||) برای مفهوم بیش‌ترین توان استفاده کنیم یعنی منظور از $7^{17}\|110!$ بیش‌ترین توان ۷ در تجزیه !۱۱۰ برابر ۱۷ است.

می‌توانیم به‌جای استفاده از دستور بالا از تقسیم‌های متوالی عدد a بر عامل اول P استفاده کنیم بدین صورت که تا حد امکان عدد a را بر عامل اول P تقسیم‌های متوالی می‌کنیم. مجموع خارج قسمت‌ها جواب مسئله است.

$$\begin{array}{l|l}
110 & 7 \\
\hline
\underline{7} & 15 \;|\; 7 \\
40 & \underline{14} \quad 2 \\
\underline{35} & 1 \\
5 &
\end{array} \Rightarrow \text{توان عدد } 7 = 15+2=17$$

مثال: معادله $3^k|25!$ چند جواب صحیح دارد؟

پاسخ:

$$\text{بیش‌ترین توان } 3 \text{ در تجزیه } 25! =\left[\frac{25}{3}\right]+\left[\frac{25}{3^2}\right]+\underbrace{\left[\frac{25}{3^3}\right]}_{0}+0=8+2=10$$

اما وقتی 3^{10} مقسوم‌علیه !۲۵ است اعداد $3^9, 3^8, \dots, 3^1, 3^0$ نیز مقسوم‌علیه !۲۵ محسوب می‌شوند پس معادله دارای مجموعه جواب $\{10, \dots, 1, 0\}$ است یعنی ۱۱ جواب صحیح دارد.

مثال: اگر $12^n \| 50!$ در این صورت n کدام‌است؟

$$12^n \| 50! \Rightarrow 3^n \times 2^{2n} \| 50! \Rightarrow \begin{cases} \text{توان ۳ در تجزیه !۵۰} = \left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{9}\right]+\left[\frac{50}{27}\right]+0=16+5+1=22 \Rightarrow n \le 22 \quad (1) \\ \text{توان ۲ در تجزیه !۵۰} = \left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{4}\right]+\left[\frac{50}{8}\right]+\left[\frac{50}{16}\right]+\left[\frac{50}{32}\right]+0=47 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n \le 47 \Rightarrow n \le \frac{47}{2} \Rightarrow n \le 23 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} n \le 22 \Rightarrow n_{max} = 22$$

تست: کوچک‌ترین عدد به صورت $k!$ که بر 5^{22} بخش‌پذیر است، کدام‌است؟

۱) !۳۵ **۲)** !۹۵ **۳)** !۱۲۰ **۴)** !۱۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲

از گزینه‌ها کمک می‌گیریم کوچک‌ترین گزینه $n = 35$ است ولی ملاحظه می‌شود توان ۵ در تجزیه !۳۵ کم‌تر از ۲۲ شده‌است.

$$\text{حداکثر توان ۵ در تجزیه !۳۵} = \left[\frac{35}{5}\right]+\left[\frac{35}{25}\right]+0=7+1=8$$

پس گزینه ۲ جواب مسئله است زیرا:

$$\text{حداکثر توان ۵ در تجزیه !۹۵} = \left[\frac{95}{5}\right]+\left[\frac{95}{25}\right]+0=19+3=22$$

البته بقیه گزینه‌ها نیز صحیح می‌باشند ولی کوچک‌ترین گزینه، گزینه ۲است.

تست: اگر $162 \times 3^x \times 2^y | 105!$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار برای $x+y$ کدام‌است؟

۱) ۱۴۶ **۲)** ۱۵۱ **۳)** ۱۰۰ **۴)** ۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱

ابتدا ۱۶۲ را تجزیه می‌کنیم داریم:

$$2 \times 3^4 \times 2^y \times 3^x | 105! \Rightarrow 3^{x+4} \times 2^{y+1} | 105!$$

حال با دستورهای زیر می‌توانیم بیش‌ترین توان ۲ و ۳ را در تجزیه !۱۰۵ محاسبه کنیم.

بیش‌ترین توان ۲ در تجزیه !۱۰۵:

$$\left[\frac{105}{2}\right]+\left[\frac{105}{4}\right]+\left[\frac{105}{8}\right]+\left[\frac{105}{16}\right]+\left[\frac{105}{32}\right]+\left[\frac{105}{64}\right]+0=101 \Rightarrow y+1=101 \Rightarrow y_{max}=100$$

بیش‌ترین توان ۳ در تجزیه !۱۰۵:

$$\left[\frac{105}{3}\right]+\left[\frac{105}{9}\right]+\left[\frac{105}{27}\right]+\left[\frac{105}{81}\right]+0=50 \Rightarrow x+4=50 \Rightarrow x_{max}=46 \Rightarrow (x+y)_{max}=100+46=146$$

تست: کوچک‌ترین مقدار n که به ازای آن $n!$ بر 219×10^{16} بخش‌پذیر باشد کدام‌است؟

۱) ۷۳ **۲)** ۷۰ **۳)** ۲۱۹ **۴)** ۸۰

پاسخ: گزینه ۱

با تجزیه عبارت به صورت مقابل داریم: $۲۱۹\times ۱۰^{۱۶}=۳\times ۷۳\times ۲^{۱۶}\times ۵^{۱۶}$

حال به کمک گزینه‌ها از گزینه کوچک‌تر یعنی $n=۷۰$ شروع می‌کنیم. !۷۰ باید بر تمامی عوامل بالا بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷۳ بخش‌پذیر نیست حال اگر $n=۷۳$ یعنی گزینه ۱ در نظر گرفته شود باید بررسی کنیم که آیا !۷۳ بر تمامی عوامل $۳\times ۷۳\times ۲^{۱۶}\times ۵^{۱۶}$ بخش‌پذیر است یا خیر.

!۷۳ بر ۷۳ و ۳ بخش‌پذیر است با روش زیر ثابت می‌شود !۷۳ بر $۲^{۱۶}$ و $۵^{۱۶}$ نیز بخش‌پذیر است.

$$\text{بیش‌ترین توان ۵ در تجزیه !۷۳}=\left[\frac{۷۳}{۵}\right]+\left[\frac{۷۳}{۲۵}\right]+۰=۱۴+۲=۱۶\ \Rightarrow\ ۵^{۱۶}\,|\,۷۳!$$

$$\text{بیش‌ترین توان ۲ در تجزیه !۷۳}=\left[\frac{۷۳}{۲}\right]+\left[\frac{۷۳}{۴}\right]+\left[\frac{۷۳}{۸}\right]+\ldots=۷۰\xrightarrow{۷۰>۱۶}۲^{۱۶}\,|\,۷۳!$$

پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

(کاربرد چهارم): تعداد صفرهای سمت راست یک عدد.

هر صفر سمت راست یک عدد یعنی آن عدد به همان تعداد صفر بر عدد ۱۰ بخش‌پذیر است و عدد ۱۰ از عوامل ۲ و ۵ ساخته شده‌است پس برای شمارش تعداد عامل ۱۰ در تجزیه هر عدد نیاز به شمارش تعداد عوامل سازنده ۱۰ یعنی ۲ و ۵ داریم.

مثال: در سمت راست عدد $۸^{۱۰۰}\times ۱۲۵^{۲}$ چند صفر وجود دارد؟

پاسخ:

$$۸^{۱۰۰}\times ۱۲۵^{۲}=۲^{۳۰۰}\times ۵^{۶}=۲^{۶}\times ۵^{۶}\times ۲^{۲۹۴}=۱۰^{۶}\times ۲^{۲۹۴}$$

پس در سمت راست این عدد ۶ صفر وجود دارد.

تست: در سمت راست عدد $۲۰^{۲۰}\times ۲۱^{۲۱}\times ۲۲^{۲۲}\times ۲۳^{۲۳}\times ۲۴^{۲۴}\times ۲۵^{۲۵}$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۴۵ **۲)** ۲۵ **۳)** ۷۰ **۴)** ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳

فقط کافیست اعدادی را تجزیه کنیم که عوامل ۵ و ۲ دارند.

$$\begin{aligned}&=۲۰^{۲۰}\times ۲۱^{۲۱}\times ۲۲^{۲۲}\times ۲۳^{۲۳}\times ۲۴^{۲۴}\times ۲۵^{۲۵}\\&=(۵^{۲۰}\times ۴^{۲۰})\times ۲۱^{۲۱}\times ۲^{۲۲}\times ۱۱^{۲۲}\times ۲۳^{۲۳}\times (۲^{۳})^{۲۴}\times ۳^{۲۴}\times (۵^{۲})^{۲۵}\\&=۵^{۷۰}\times \underbrace{۲^{۴۰}\times ۲^{۲۲}\times ۲^{۷۲}}_{۲^{۱۳۴}}\times\ldots\ \Rightarrow\end{aligned}$$

چنان‌چه ملاحظه می‌شود ۷۰ عامل ۵ و بیش از ۷۰ عامل ۲ داریم هر صفر هم‌زمان به یک ۲ و یک ۵ احتیاج دارد. پس تعداد اضافی ۲ نقشی در ساختن تعداد صفر ندارد پس تعداد صفرهای سمت راست این عدد برابر است با ۷۰.

تست: در سمت راست عدد !۵۰ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۱۰ **۲)** ۱۲ **۳)** ۱۸ **۴)** ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲

برای شمارش عوامل ۲ و ۵ در !۵۰ کافیست فقط عوامل ۵ را بشماریم چون تعداد ۵ در تجزیه !n کم‌تر از تعداد عوامل ۲ است. پس کافیست تعداد عوامل ۵ را در تجزیه !۵۰ حساب کنیم:

$$\text{تعداد عوامل ۵}=\text{تعداد صفرها}=\left[\frac{۵۰}{۵}\right]+\left[\frac{۵۰}{۲۵}\right]+\left[\frac{۵۰}{۱۲۵}\right]+\ldots=۱۲$$