« پاسخ تشریحی و تحلیلی دیفرانسیل، حسابان و ریاضی پایه»

۱۰۱- پاسخ گزینه‌ی ۱

وقتی یک تابع درجه‌ی دوم محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند، مانند آن است که معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی منفی است.

شرط این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه‌ی منفی باشد آن است که داشته‌باشیم:
$$\begin{cases}\Delta>۰\\ P>۰\\ S<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+۳)^{۲}+۴a>۰\\ -\frac{۱}{a}>۰\\ \frac{(a+۳)}{a}<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}+۱۰a+۹>۰\\ a<۰\\ a>۰ \text{ یا } a<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<-۹ \text{ یا } a>-۱\\ a<۰\\ a>۰ \text{ یا } a<-۳\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-۹$$

۱۰۲- پاسخ گزینه‌ی ۲

دامنه‌ی تعریف تابع $D_f=(۰\,,۲]$، پس در این بازه $|x|=x$ و ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر است:
$$f(x)=۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲\sqrt{x(۲-x)}=۲\sqrt{-x^{۲}+۲x}=۲\sqrt{۱-(x-۱)^{۲}}$$
$$۰<x\le ۲\Rightarrow -۱<x-۱\le ۱\Rightarrow ۰\le(x-۱)^{۲}\le ۱\Rightarrow ۰\le ۱-(x-۱)^{۲}\le ۱\Rightarrow ۰\le ۲\sqrt{۱-(x-۱)^{۲}}\le ۲\Rightarrow R_f=[۰\,,۲]$$

۱۰۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

با توجه به شکل، وقتی x بین صفر و ۳ است سه دوره‌ی تناوب وجود دارد، پس $T=۱$. از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $y=k\sin mx$ برابر $T=\frac{۲\pi}{m}$ است، در نتیجه $\frac{۲\pi}{b\pi}=۱$ یا $b=۲$. با توجه به شکل $f\left(\frac{۱}{۴}\right)=-۳$ است، بنابراین داریم:
$$-۳=a\sin ۲\pi\times\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=-۳$$
و درنتیجه $ab=-۶$.

۱۰۵- پاسخ گزینه‌ی ۳

غلظت رنگ، برابر وزن ماده‌ی رنگی موجود در محلول به وزن کل محلول است و اگر آن را در صد ضرب کنیم، درصد غلظت رنگ به‌دست خواهدآمد.

وزن ماده‌ی رنگی موجود در مخلوط $=۱۱\times ۰/۴+۴\times ۰/۷=۷/۲$

وزن مخلوط $=۱۱+۴=۱۵$

اگر x کیلوگرم آب این مخلوط، تبخیر شود تا به غلظت ۵۰ درصد برسد، آن‌گاه داریم:
$$\frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱۴/۴=۱۵-x\Rightarrow x=۰/۶\text{ kg}$$

۱۰۶- پاسخ گزینه‌ی ۴

چون سمت چپ نامعادله، نامنفی است، پس باید طرف راست آن نیز مثبت باشد؛ یعنی $x>۰$. اکنون می‌توان نامساوی را به‌صورت زیر تبدیل نمود.
$$|x||x-۲|<x\xrightarrow{x>۰}x|x-۲|<x\Rightarrow|x-۲|<۱\Rightarrow -۱<x-۲<۱\Rightarrow ۱<x<۳$$

۱۰۷- پاسخ گزینه‌ی ۳

ابتدا ضابطه‌ی $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$g(x)=(2x-3-[2x-3])-2(x-[x])=2x-3-[2x]-(-3)-2x+2[x]\ \Rightarrow\ g(x)=2[x]-[2x]$$

می‌دانیم $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$، پس $g(x)=[x]-\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

اگر k عددی صحیح و دلخواه باشد، دو حالت می‌توان درنظر گرفت:

الف) $k\le x<k+\frac{1}{2}$: دراین‌صورت $[x]=k$ و $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k$ در نتیجه، $g(x)=0$

ب) $k+\frac{1}{2}\le x<k+1$: دراین‌صورت $[x]=k$ و $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+1$، در نتیجه $g(x)=-1$؛ یعنی برد تابع $g(x)$ برابر $R_g=\{0\,,-1\}$ است.

۱۰۸- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$f(x)=2x-|4-2x|=\begin{cases}4x-4 & : x\le 2\\ 4 & : x>2\end{cases}$$

این تابع فقط در بازه‌ی $(-\infty\,,2]$ وارون‌پذیر است، زیرا به‌ازای $x>2$ تابعی ثابت است و تابع ثابت، یک به یک نمی‌باشد.

اکنون باید وارون تابع $y=f(x)=4x-4$ را با شرط $x\le 2$ پیدا کنیم. اگر $x\le 2$، آن‌گاه $y\le 4$.

$$y=4x-4\ \Rightarrow\ x=\frac{y+4}{4}:y\le 4\ \Rightarrow\ f^{-1}(y)=\frac{y}{4}+1:y\le 4$$

بنابراین: $f^{-1}(x)=\frac{x}{4}+1\,;\ x\le 4$

۱۰۹- پاسخ گزینه‌ی ۳ معادله را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$2\cos 2x=4\cot x.\sin x+\cot x.\tan x\ \Rightarrow\ 2(2\cos^2 x-1)=4\cos x+1$$

$$\Rightarrow\ 4\cos^2 x-4\cos x-3=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\cos x=\frac{3}{2}>1 & \text{غیرقابل‌قبول}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

به‌ازای تمام این جواب‌ها $\tan x$ و $\cot x$ تعریف شده‌اند، پس این جواب‌ها قابل‌قبول هستند.

۱۱۰- پاسخ گزینه‌ی ۲

برای هر x و y حقیقی داریم $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

واضح است که $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$، پس داریم:

$$\text{عبارت}=\tan^{-1}\frac{(3+2\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(3+2\sqrt{2}).\frac{\sqrt{2}}{2}}=\tan^{-1}\frac{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

۱۱۱- پاسخ گزینه‌ی ۱ در همسایگی راست نقطه‌ی $\frac{1}{6}$ داریم $x>\frac{1}{6}$ یا $\pi x>\frac{\pi}{6}$، پس $\cos\pi x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ در نتیجه $4\cos^2\pi x<3$؛ یعنی اگر $x\to\frac{1}{6}^+$، آن‌گاه $[4\cos^2\pi x]=[3^-]=2$. اکنون داریم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{6}^+}\frac{[4\cos^2\pi x]=12x}{ax+b}=\lim_{x\to\frac{1}{6}^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}\qquad(1)$$

حد صورت کسر اخیر، صفر است، برای این‌که حد تمام کسر، عددی غیرصفر باشد باید حد مخرج نیز صفر باشد تا عبارت به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید، در نتیجه باید داشته‌باشیم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{6}^+} ax+b=0 \Rightarrow \frac{a}{6}+b=0 \Rightarrow a=-6b \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{6}^+}\frac{2-12x}{-6bx+b}=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{6}^+}\frac{2(1-6x)}{b(-6x+1)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{1}{2} \Rightarrow b=4$$

از رابطه‌ی (2) نتیجه می‌شود $a=-24$ و در نتیجه $a+b=-20$

۱۱۲- پاسخ گزینه‌ی ۳ چون $f'(1)$ وجود دارد، پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است، در نتیجه باید در این نقطه پیوسته باشد و ضمناً مشتق‌های چپ و راست تابع در $x=1$ برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x-\frac{1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b\\ f(1)=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{پیوستگی در } x=1} 1+a+b=0 \qquad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{x^2}: x\geq 1 \Rightarrow f'_+(1)=1+\frac{1}{1}=2\\ 2x+a: x<1 \Rightarrow f'_-(1)=2+a\end{cases} \Rightarrow 2+a=2 \Rightarrow a=0 \xrightarrow{(1)} b=-1$$

چون $\sqrt{2}-1<1$، بنابراین خواهیم‌داشت:

$$f'(1-\sqrt{2})=2(1-\sqrt{2})+0=2-2\sqrt{2}$$

۱۱۳- پاسخ گزینه‌ی ۱ ابتدا نامعادله‌ی $\left|x-\frac{3}{4}\right|\leq x^2$ را حل می‌کنیم؛ داریم:

$$-x^2\leq x-\frac{3}{4}\leq x^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-x+\frac{3}{4}\geq 0 \xrightarrow{\Delta<0} x\in\mathbb{R}\\ x^2+x-\frac{3}{4}\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{1}{2} \text{ یا } x\leq-\frac{3}{2}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq\frac{1}{2} \text{ یا } x\leq-\frac{3}{2}$$

پس در بازه‌های $x\leq-\frac{3}{2}$ و $x\geq\frac{1}{2}$، x^2 از $\left|x-\frac{3}{4}\right|$ بزرگ‌تر و یا مساوی آن است ولی در بازه‌ی $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$، x^2 از $\left|x-\frac{3}{4}\right|$ کوچک‌تر است. اکنون داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2: x\leq-\frac{3}{2} \text{ یا } x\geq\frac{1}{2}\\ \left|x-\frac{3}{4}\right|: -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

برد ضابطه‌ی اول تابع $R_1=[\frac{1}{4},+\infty)$ و برد ضابطه‌ی دوم آن $R_2=\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right)$ است، در نتیجه $R_f=R_1\cup R_2=[\frac{1}{4},+\infty)$؛ یعنی کم‌ترین مقدار تابع، $\frac{1}{4}$ است.

۱۱۴- پاسخ گزینه‌ی ۲

برای هر $x\in\left(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)-\{۰\}$ **داریم** $\frac{x}{\sin x}>۱$ و $\frac{\sin x}{x}<۱$.

$$\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]+۲\left[\frac{x}{\sin x}\right]=\left[۱^-\right]+۲\left[۱^+\right]=۰+۲\times ۱=۲$$

۱۱۵- پاسخ گزینه‌ی ۴

تابع وقتی در یک نقطه پیوسته است که حد تابع در آن نقطه با مقدارش برابر باشد.

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{-(۱-x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{-(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{-\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{x})^۲}\times(۱+\sqrt{x})}=-\infty$$

چون تابع در نقطه‌ی $x=۱$ حد ندارد، در نتیجه به‌ازای هر مقدار a، تابع ناپیوسته است.

۱۱۶- پاسخ گزینه‌ی ۱

مجانب‌های مایل یا افقی یک تابع در صورت وجود، هم‌ارز خطی تابع (هم‌ارز درجه‌ی اول) در $\pm\infty$ است.

اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$

$$f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}x+\sqrt[۳]{-۱}\left(x+\frac{۱}{۳(-۱)}\right)=\frac{۱}{۳}$$

پس $y=\frac{۱}{۳}$ مجانب افقی تابع است. اکنون تابع را با خط $y=\frac{۱}{۳}$ تلاقی می‌دهیم.

$$x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\frac{۱}{۳}-x$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^۲-x^۳=\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۳}x+x^۲-x^۳\Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

۱۱۷- پاسخ گزینه‌ی ۲

معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ می‌گذرد به‌صورت $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ است. چون تابع $f(x)$ در $x=۳$ بر این خط مماس است، پس شیب مماس $-\frac{۱}{۲}$؛ یعنی $f'(۳)=-\frac{۱}{۲}$ و چون نقطه‌ی تماس هم روی تابع و هم روی خط مماس است، پس به‌ازای $x=۳$ داریم $y=-\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱$؛ یعنی $f(۳)=۱$. اکنون حد موردنظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است و با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)f'(x)+۴f'(x)}{-۱}=\frac{۲f(۳)f'(۳)+۴f'(۳)}{-۱}=\frac{۲\times ۱\times\frac{-۱}{۲}+۴\times\frac{-۱}{۲}}{-۱}=۳$$

۱۱۸- پاسخ گزینه‌ی ۲

عبارت $f'(x).g'(f(x))$ همان مشتق تابع $g(f(x))$ است.

$$g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{\frac{۱}{۱-x^۲}}}=x\Rightarrow(g(f(x)))'=۱$$

البته توجه داشته باشیم که باید $-۱<x<۱$ باشد.

۱۱۹- پاسخ گزینه‌ی ۴ اگر $A(۱\,,a)\in f^{-۱}$، آن‌گاه $A'(a\,,۱)\in f$، پس $f(a)=۱$ و درنتیجه: $۱=\frac{۲a-۱}{a+۲} \Rightarrow a=۳$

چون $f'(x)=\frac{۵}{(x+۲)^۲}$، در نتیجه $f'(۳)=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$. اکنون داریم:

$$(f^{-۱})'(۱)=\frac{۱}{f'(۳)}=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=۵ \quad \text{شیب مماس}$$

در نتیجه شیب قائم بر $f^{-۱}$، برابر $-\frac{۱}{۵}$ و معادله‌ی خط قائم به‌صورت زیر است:

$$y-۳=-\frac{۱}{۵}(x-۱) \xrightarrow{y=۰} -۳=-\frac{۱}{۵}(x-۱) \Rightarrow x=۱۶$$

۱۲۰- پاسخ گزینه‌ی ۴ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی یک تابع، ریشه‌ی با مرتبه‌ی تکرار فردِ مشتق آن تابع است.

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax-۸$$

چون می‌خواهیم یکی از ریشه‌های معادله‌ی $f'(x)$ در بازه‌ی $(۱\,,۴)$ قرارگیرد، پس بنابر قضیه‌ی بولتزانو باید داشته‌باشیم $f'(۱)f'(۴)<۰$، در نتیجه:

$$(۳+۲a-۸)(۴۸-۸a-۸)<۰ \Rightarrow (۲a-۵)(۸۶+۴۰)<۰ \Rightarrow -۵<a<\frac{۵}{۲}$$

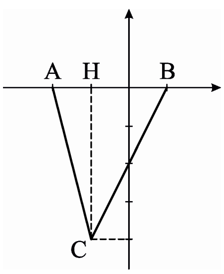
۱۲۱- پاسخ گزینه‌ی ۳ عبارت درون قدرمطلق در بازه‌ی $x\in(-۲\,,۱)$ منفی است، پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-۱)(x^۲+x-۲) & :-۲<x<۱\\ (x-۱)(x^۲+x-۲) & :x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x^۳+۳x-۲ & :-۲<x<۱\\ x^۳-۳x+۲ & :x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۲\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-۳x^۲+۳ & -۲<x<۱\\ ۳x^۲-۳ & x\geq ۱ \text{ یا } x<-۲\end{cases}$$

تابع در $x=-۲$ مشتق‌پذیر نیست (مشتق‌های چپ و راست در این نقطه برابر نیستند)، پس این نقطه، بحرانی است.

$f'(x)=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$ نقاط بحرانی



در نتیجه نقاط بحرانی تابع $A(-۲\,,۰)$، $B(۱\,,۰)$ و $C(-۱\,,-۴)$ هستند و با توجه به شکل مقابل داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times CH=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴=۶$$

۱۲۲- پاسخ گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل، تابع در $x=-۱$ تعریف نشده است، پس گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند. ضمناً تابع $\tan^{-۱}$ صعودی و پیوسته است، پس باید $u(x)$ نیز در هر شاخه اکیداً صعودی باشد و تنها گزینه‌ی ۴ این ویژگی را دارد.

۱۲۳- پاسخ گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ و $x_k=a+k\Delta x$، بنابراین $\Delta x=\frac{۲-۰}{۴}=\frac{۱}{۲}$ و $x_k=\frac{k}{۲}$ و چون تابع $f(x)$ در بازه‌ی مذکور اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$u_۴=\frac{۱}{۲}\left(f\left(\frac{۱}{۲}\right)+f(۱)+f\left(\frac{۳}{۲}\right)+f(۲)\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}\times ۲/۱=۱/۰۵$$

۱۲۴- پاسخ گزینه‌ی ۲ واضح است که:

$$\sqrt{(۱+\sqrt{x})^{۲}-۴x}=\sqrt{(۱-\sqrt{x})^{۲}}=|۱-\sqrt{x}|\xlongequal{x>۱}\sqrt{x}-۱$$

$$\int_{۱}^{۴}\sqrt{(۱+\sqrt{x})^{۲}-۴x}\,dx=\int_{۱}^{۴}(\sqrt{x}-۱)dx=\int_{۱}^{۴}(x^{\frac{۱}{۲}}-۱)dx=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-x\Big]_{۱}^{۴}=\frac{۲}{۳}\times ۸-۴-\left(\frac{۲}{۳}-۱\right)=\frac{۵}{۳}$$

دیفرانسیل، حسابان و ریاضی پایه: *آقای هاشمی طاهری*