

زمان پیشنهادی: ۴۵ دقیقه

دیفرانسیل و مسابان: کاربردهای مشتق

۱- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = 2x - [2x]$ که در بازه‌ی $[-1, 2]$ تعریف شده‌است، کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲- تابع $f(x) = \begin{cases} ax & x < 0 \\ 2x^2 - x & 0 \leq x \end{cases}$ فقط یک نقطه‌ی بحرانی دارد، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴)

۳- در تابع $f(x) = x^3 - 3x + k$ در بازه‌ی $[-2, 0]$ مجموع مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم مطلق برابر ۲ است. مقدار k کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴- فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی منحنی $y^2 = 2x + 4$ از مبدأ مختصات برابر کدام است؟

- ۲ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۵- بیش‌ترین مساحت مستطیلی که به‌وسیله طنابی به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور نمود چند متر مربع است؟ (یک ضلع مستطیل، رودخانه است.)

- ۲۴۴ (۱) ۲۸۸ (۲) ۲۹۶ (۳) ۳۱۶ (۴)

۶- در صفحه‌ی xOy دو نقطه‌ی $A(0, 2)$ و $B(0, 8)$ مفروضند. اگر نقطه‌ی M را روی محور Ox طوری انتخاب کنیم که زاویه‌ی $\angle AMB$ ماکسیمم شود، طول نقطه‌ی M برابر خواهد شد با:

- ۲ $\sqrt{5}$ (۱) $\sqrt{15}$ (۲) $\sqrt{17}$ (۳) ۴ (۴)

۷- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x) = \frac{\sin x - 1}{2 \sin x + 1}$ در آن یکنوا باشد، کدام است؟

- $\frac{\pi}{6}$ (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴)

۸- به‌ازای چه مقادیری از m ، تابع $f(x) = \frac{mx - x + 2}{x + m - 2}$ روی بازه‌ی $(-\infty, 1)$ نزولی اکید است؟

- $0 < m < 3$ (۱) $m < 0$ یا $m > 3$ (۲) $0 < m \leq 1$ (۳) $m \geq 1$ یا $m < 0$ (۴)

۹- خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$ در نقطه‌ی $x = 1$ از منحنی عبور می‌کند و از مبدأ مختصات می‌گذرد. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۰- نقاط A ، B و C به طول‌های ۰، ۲ و ۳ روی منحنی $f(x) = x^4 - 4x^3 + x + 1$ قراردارند. پاره‌خط AB از منحنی و خط مماس بر تابع در نقطه‌ی C در همسایگی این نقطه از منحنی قرار می‌گیرد؟

- (۱) بالاتر، بالاتر (۲) بالاتر، پایین‌تر (۳) پایین‌تر، بالاتر (۴) پایین‌تر، پایین‌تر

۱۱- به‌ازای کدام مقادیر a تابع $y = \frac{a}{a \cos^3 x + 2}$ همواره پیوسته است و در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{3}$ می‌نیم است؟

(۱) $a > -2$ (۲) $0 \leq a < 2$ (۳) $-2 < a < 2$ (۴) $-2 < a \leq 0$

۱۲- برای تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، نقاط $A(0, 2)$ و $B(1, 0)$ به ترتیب اکسترمم نسبی و عطف هستند. کدام عدد بزرگ‌تر است؟

(۱) a (۲) b (۳) c (۴) d

۱۳- اگر $M(-2, -7)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{x + b}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴- اگر عرض نقطه‌ی می‌نیم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x + 1}$ برابر ۴ باشد، مقدار a برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۵- برای تابع $f(x) = x^2 + 2 \cos x$ نقطه‌ای به طول $x = 0$ چه نقطه‌ای است؟

(۱) می‌نیم است. (۲) ماکسیمم است. (۳) عطف است. (۴) هیچ کدام

۱۶- مبدأ مختصات برای تابع $f(x) = (-1)^{[x]}(x - [x])$ چگونه نقطه‌ای است؟

(۱) می‌نیم نسبی است ولی مطلق نیست.
 (۲) ماکسیمم نسبی است ولی مطلق نیست.
 (۳) هم می‌نیم نسبی است و هم مطلق
 (۴) نه اکسترمم نسبی است و نه مطلق.

۱۷- اگر می‌نیم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (m-1)x^2 + x$ برابر -2 باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) نشدنی

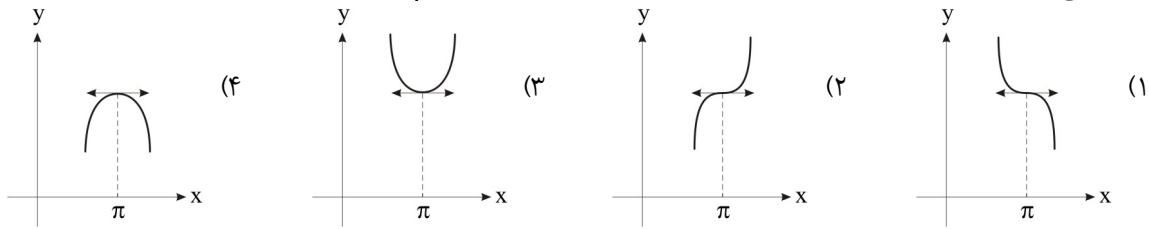
۱۸- نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + ax$ بر روی خط به معادله‌ی $y = 2$ دو پاره‌خط مساوی جدا می‌کند. مقدار a کدام است؟

(۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

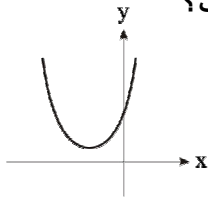
۱۹- یکی از محورهای تقارن تابع $f(x) = \frac{ax}{x-a}$ با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۳۲ تشکیل می‌دهد. مقدار مثبت a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \tan x$ در همسایگی $x = \pi$ به کدام صورت است؟



۲۱- شرط لازم و کافی برای این که نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2ax + b$ به شکل روبه‌رو باشد، کدام است؟



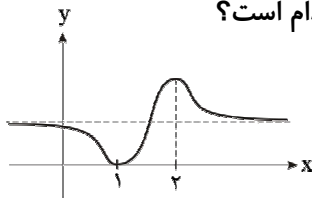
(۲) $b < a^2$ و $a > 0$

(۱) $b > a^2$ و $a > 0$

(۴) $b < a^2$ و $a < 0$

(۳) $b > a^2$ و $a < 0$

۲۲- اگر نمودار شکل مقابل، مربوط به تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 6x + c}$ باشد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟



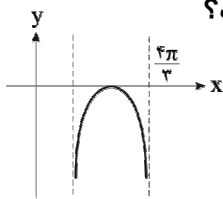
(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۸

(۳) ۷

۲۳- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\cos x + a}{b \cos x + 1}$ است، مقدار $a + b$ کدام است؟



(۲) ۱

(۱) -۱

(۴) ۳

(۳) ۲

۲۴- خط $y = \frac{2x}{5\pi}$ منحنی تابع $y = \sin x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

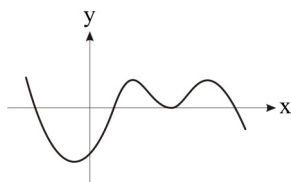
(۴) کم‌تر از پنج

(۳) بیش از هفت

(۲) پنج

(۱) هفت

۲۵- نمودار مشتق تابع f به صورت زیر است. تعداد نقاط ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی تابع f کدام است؟



(۱) دو ماکسیمم و دو می‌نیمم نسبی

(۲) یک ماکسیمم و یک می‌نیمم نسبی

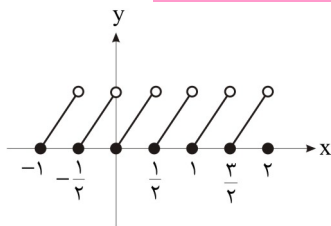
(۳) دو ماکسیمم و یک می‌نیمم نسبی

(۴) یک می‌نیمم و دو ماکسیمم نسبی

پاسخ کلیدی

۳ (۴)	۱ (۳)	۲ (۲)	۲ (۱)
۳ (۸)	۳ (۷)	۴ (۶)	۲ (۵)
۴ (۱۲)	۴ (۱۱)	۴ (۱۰)	۱ (۹)
۴ (۱۶)	۱ (۱۵)	۳ (۱۴)	۳ (۱۳)
۱ (۲۰)	۴ (۱۹)	۲ (۱۸)	۲ (۱۷)
۳ (۲۵)	۴ (۲۳)	۱ (۲۲)	۱ (۲۱)

پاسخ تشریحی - تحلیلی



۱- گزینه‌ی ۲ نقاط $\frac{3}{2}$ ، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، 0 و $-\frac{1}{2}$ اکسترمم نسبی هستند.

$f'(\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ بحرانی است

۲- گزینه‌ی ۲

$$f'(x) = \begin{cases} a & x < 0 \\ 4x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

پس باید f و 0 مشتق‌پذیر باشد.

f در 0 پیوسته $\Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = a \\ f'_+(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

۳- گزینه‌ی ۱

x	-2	-1	0
$f(x)$	$k-2$	$k+2$	k

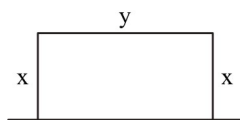
$\Rightarrow \begin{cases} \max = k+2 \\ \min = k-2 \end{cases}$

$(k+2) + (k-2) = 2 \Rightarrow k = 1$

$d = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y^2 = 2x+4} d = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

۴- گزینه‌ی ۳

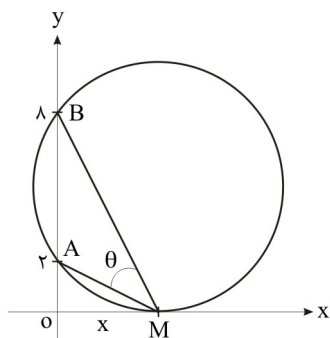
$\Rightarrow d = \sqrt{(x+1)^2 + 3} \Rightarrow \min(d) = \sqrt{3}$



$2x + y = 48$

$S = xy = x(48 - 2x) \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \max(S) = 288$

۵- گزینه‌ی ۲



۶- گزینه‌ی ۴ θ وقتی \max است که دایره‌ی گذرنده از A ، B و M در نقطه‌ی

M بر محور x مماس شود.

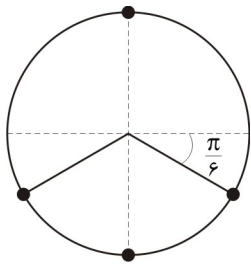
$MO^2 = OA \times OB \Rightarrow x^2 = 2 \times 8 \Rightarrow x = 4$

$$f'(x) = \frac{3 \cos x}{(2 \sin x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

۷- گزینه‌ی ۳

$$\text{مجاذب‌های قائم: } \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
f'	+	۰	-	-	۰
f	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	طول بازه:



روش دوم: نقاطی که یکنوایی تغییر می‌کند را روی دایره نشان می‌دهیم.

$$1) y' < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 3m}{(x+m-2)^3} < 0$$

دو شرط لازم است:

۸- گزینه‌ی ۳

$$2) \text{مجاذب قائم } \in (-\infty, 1) x = 2 - m \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < m < 3 \\ m \leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0 < m \leq 1$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 6a = 0 \Rightarrow a = -1$$

x = 1 نقطه‌ی عطف است.

۹- گزینه‌ی ۱

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + b \Rightarrow f(1) = b - 2 \Rightarrow A(1, b - 2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(1) = -3$$

$$y - (b - 2) = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + b + 1$$

$$(0, 0) \Rightarrow 0 = b + 1 \Rightarrow b = -1$$

$$y'' = 12x^2 - 24x$$

۱۰- گزینه‌ی ۴

x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
y''	+	۰	-	۰
y	∪	∩	∪	

تقعر تابع در همسایگی $x = 3$ رو به پایین است.



تقعر تابع در بازه‌ی $[0, 2]$ رو به پایین است.

$$\cos 3x = -\frac{2}{a}$$

برای این که تابع همواره پیوسته باشد باید مخرج ریشه نداشته باشد.

۱۱- گزینه‌ی ۴

$$\Rightarrow 2 > |a| \Rightarrow -2 < a < 2$$

این معادله وقتی ریشه ندارد که $|\frac{2}{a}| > 1$ باشد.

$$f'(x) = \frac{15a \sin 3x}{(a \cos 3x + 2)^2}$$

	$\frac{\pi}{3}$	
y'	+a 0 -a	
y	↙ min ↗	

$$\Rightarrow a < 0 \rightarrow -2 < a < 0$$

به‌ازای $a = 0$ نیز شرایط برقرار است پس: $-2 < a \leq 0$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{x + b} \\ f_H(x) = \frac{2ax + 1}{1} \end{cases} \xrightarrow{M(-2, -7)} \begin{cases} -7 = \frac{4a - 1}{b - 2} \\ -7 = -4a + 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$$

۱۳- گزینه‌ی ۳

$$\frac{x^2 + 2x + a}{x + 1} = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + (a - 4) = 0$$

۱۴- گزینه‌ی ۳

خط $y = 4$ بر تابع مماس است.

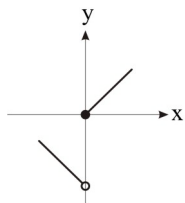
این معادله باید ریشه‌ی مضاعف داشته‌باشد.

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a - 4 = 1 \Rightarrow a = 5$$

$$f'(x) = 2(x - \sin x)$$

۱۵- گزینه‌ی ۱

همواره: $f''(x) = 2(1 - \cos x) \geq 0$ ؛ چون $f'(0) = 0$ و f رو به بالاست پس $x = 0$ مینیمم نسبی است.



$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -1 - x & x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع را در اطراف مبدأ رسم می‌کنیم.

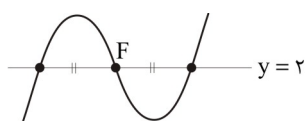
۱۶- گزینه‌ی ۴

خط $y = -2$ بر تابع مماس است. این معادله باید ریشه مضاعف داشته‌باشد.

$$(m - 1)x^2 + x = -2 \Rightarrow (m - 1)x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8(m - 1) = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{8} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^2 + x$$

این تابع مینیمم دارد پس جواب قابل قبول است.



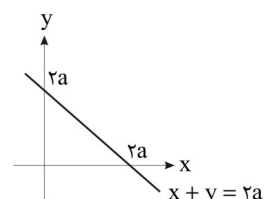
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = a + 2 \Rightarrow a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

باید $y = 2$ از نقطه‌ی عطف تابع بگذرد.

۱۸- گزینه‌ی ۲

$$\text{مجانِب‌ها: } \begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز } O(a, a)$$



۱۹- گزینه‌ی ۴

$$\text{محو‌رهای تقارن: } y - a = \pm(x - a) \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x + y = 2a \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}(2a)(2a) = 2a^2 \Rightarrow 2a^2 = 32 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$f'(x) = -\tan^2 x < 0 \Rightarrow f \text{ نزولی اکید}$$

۲۰- گزینه‌ی ۱

$$f(0) > 0 \Rightarrow b > 0$$

۲۱- گزینه‌ی ۱

$$\text{محو‌ر تقارن } < 0 \Rightarrow x = \frac{-2a}{2} < 0 \Rightarrow a > 0$$

$$f \text{ ریشه ندارد.} \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow a^2 - b < 0$$

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2 \Rightarrow a = -2, b = 1$$

$x = 1$ ریشه‌ی مضاعف تابع است، پس:

۲۲- گزینه‌ی ۱

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 6x + c} \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow c = 6$$

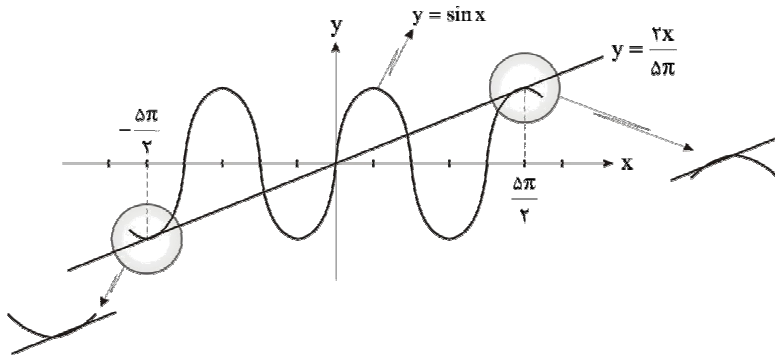
$$b \cos \frac{4\pi}{3} + 1 = 0 \Rightarrow b \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow b = 2$$

$\frac{4\pi}{3}$ ریشه‌ی مخرج است.

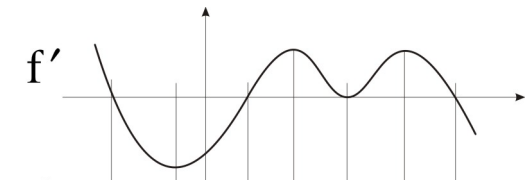
۲۳- گزینه‌ی ۴

تابع ریشه‌ی مضاعف دارد یعنی $\cos x + a = 0$ ریشه‌ی مضاعف ندارد، پس $a = \pm 1$ چون نقطه‌ی تماس بین 0 و $\frac{4\pi}{3}$ است،

پس نقطه‌ی تماس $x = \pi$ است و $a = 1$ $\Rightarrow \cos \pi + a = 0$



۲۴- گزینه‌ی ۱



f'	+	○	-	-	○	+	+	○	+	+	-
f''	-	-	○	+	+	○	-	+	-	-	-

۲۵- گزینه‌ی ۳

