

زمان پیشنهادی: ۴۵ دقیقه

دیفرانسیل و مسابان: مشتق

۱- تفاضل مشتق‌های راست و چپ تابع $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}$ در نقطه‌ی $a = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲- مشتق تابع $y = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (۲) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x$ (۳) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$ (۴) $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$

۳- مقدار مشتق تابع $y = \tan^{-1}\left(\cos \frac{x}{2}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۴- اگر u و v تابع‌هایی از x باشند، از رابطه‌ی $\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = 0$ کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

- (۱) $\frac{u}{v}$ ثابت است. (۲) uv ثابت است. (۳) $u + v$ ثابت است. (۴) u برابر صفر است.

۵- اگر $2f(2x) + xf\left(\frac{2}{x}\right) = x^3 + x + 1$ باشد، حاصل $f'(2)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{5}$

۶- مشتق تابع $f(x) = x^4 + x^3$ نسبت به x^3 برابر کدام است؟

- (۱) $4x^3 + 3x^2$ (۲) $x + 1$ (۳) $4x + 1$ (۴) $\frac{4}{3}x + 1$

۷- برای تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 2x + 1 & x = 1 \\ x^3 + x + 1 & x < 1 \end{cases}$ کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) f در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر است و $f'(1) = 2$
 (۲) f در نقطه‌ی $x = 1$ دارای مشتق‌های راست و چپ است و $f'_+(1) + f'_-(1) = 6$
 (۳) f در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.
 (۴) f در نقطه‌ی $x = 1$ هیچ کدام از مشتق‌های راست و چپ را ندارد.

۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 1 & x \leq 1 \\ bx + \ln \sqrt{2x - 1} & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر است. مقدار a برابر کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۹- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = |5 - x\sqrt{x}|$ مقدار $f'(1) + f'(4)$ برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

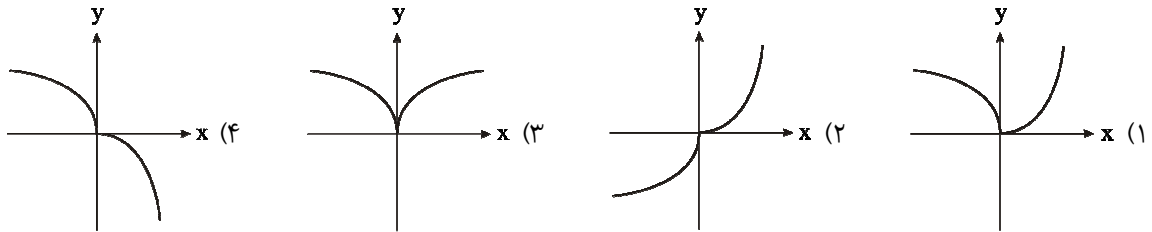
۱۰- مشتق چپ تابع $f(x) = (x^2 - 1)|x^2 - x - 2|$ در نقطه‌ی گوشه‌ی تابع برابر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) صفر (۴) -۹

۱۱- اگر $f(x) = |x^2 - x[x]|$ باشد، مقدار $f'(-\frac{3}{2})$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۲- نمودار تابع $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}[x]$ در همسایگی $x = 0$ به کدام صورت است؟



۱۳- با فرض $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & x \geq 1 \\ x^3 + x^2 + 2 & x < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-3h) - f(1+h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) -۲۲ (۳) -۲۶ (۴) -۲۸

۱۴- برای کدام مقدار a خط $y = x + a$ بر وارون تابع $f(x) = x + \sin x$ مماس است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) -2π (۴) $-\frac{3\pi}{2}$

۱۵- معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\frac{e^y}{x} + e^{xy} - x - 2 = 0$ در مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $y = -2x$ (۲) $y = 2x$ (۳) $y = -x$ (۴) $y = x$

۱۶- برای تابع $f(x) = x^3 + x$ مقدار $(f^{-1})''(2)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{3}{32}$ (۳) $-\frac{3}{16}$ (۴) $-\frac{3}{32}$

۱۷- اگر $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - x^3 + x + 1$ باشد، مقدار $f^{(4)}(1)$ چند برابر ۵! است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- مشتق پانزدهم تابع $f(x) = \sin^2 x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر کدام است؟

- (۱) 2^{15} (۲) -2^{15} (۳) 2^{14} (۴) -2^{14}

۱۹- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ، $0 < x < \pi$ در نقطه‌ای به طول x_0 واقع بر آن، موازی خط به معادله‌ی

$3y - 2x = 5$ است، مقدار $x = 0$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{5\pi}{3}$

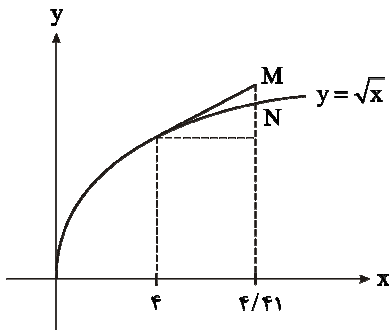
۲۰- کدام خط بر نمودار تابع $y = \frac{2 + \sin x}{\cos x}$ مماس است؟

- (۱) $y = 2$ (۲) $y = 3$ (۳) $y = \sqrt{3}$ (۴) $y = \sqrt{2}$

۲۱- از نقطه‌ی $(2, 5)$ دو خط می‌توان به $f(x) = 4x - x^2$ مماس کرد، اگر نقاط تماس را A و B بنامیم، طول پاره‌خط

AB کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۲۲- در شکل مقابل، فاصله‌ی MN کدام است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/0025$ (۳) $0/0125$ (۴) $0/0625$

۲۳- زاویه‌ی نقطه‌ی گوشه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x} & x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{3} & x < 1 \end{cases}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۲۴- هزینه‌ی تولید x واحد کالا از رابطه‌ی $C(x) = 100 + 50x + 0/1x^2$ به دست می‌آید. اگر قیمت فروش هر واحد کالا

برابر 70 واحد پول باشد، به ازای چه تعدادی از تولید سود به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۰۰

۲۵- نقطه‌ی M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر $AB = 9$ در حرکت است، تصویر نقطه‌ی M بر قطر AB با سرعت ثابت

$0/05$ واحد در ثانیه از نقطه‌ی A دور می‌شود، در لحظه‌ای که این فاصله برابر $6/25$ واحد است، سرعت افزایش طول

وتر AM کدام است؟

- (۱) $0/024$ (۲) $0/030$ (۳) $0/045$ (۴) $0/072$

پاسخ کلیدی

۲ (۴)	۳ (۳)	۳ (۲)	۱ (۱)
۴ (۸)	۲ (۷)	۴ (۶)	۲ (۵)
۱ (۱۲)	۱ (۱۱)	۴ (۱۰)	۴ (۹)
۳ (۱۶)	۲ (۱۵)	۳ (۱۴)	۳ (۱۳)
۳ (۲۰)	۲ (۱۹)	۴ (۱۸)	۴ (۱۷)
۲ (۲۴)	۲ (۲۳)	۲ (۲۲)	۲ (۲۱)
			۲ (۲۵)

پاسخ تشریحی - تحلیلی

$$f'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} - \circ}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{4 - (4 - x^2)}}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{|x|}{x} \times \frac{1}{2}$$

۱- گزینه‌ی ۱

$$\Rightarrow f' + (\circ) = \frac{1}{2}, f' - (\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{1+x^2 - x^2} = \sqrt{1+x^2} - x \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$

۲- گزینه‌ی ۳

$$y' = \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} y' = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{4}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{5}$$

۳- گزینه‌ی ۳

$$\frac{u'v + v'u}{uv} = \circ \Rightarrow u'v + v'u = \circ \Rightarrow (uv)' = \circ \Rightarrow uv \text{ تابع ثابت}$$

۴- گزینه‌ی ۲

$$4f'(2x) + \left(1f + \left(\frac{2}{x} \right) + x \left(-\frac{2}{x^2} f' \left(\frac{2}{x} \right) \right) \right) = 3x^2 + 1$$

۵- گزینه‌ی ۲

$$x = 1 \Rightarrow 4f'(2) + f(2) - 2f'(2) = 4 \Rightarrow 2f'(2) + f(2) = 4$$

$$2f(2) + f(2) = 3 \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{2}$$

در معادله‌ی اصلی $x = 1$ قرار می‌دهیم:

$$y = x^4 + x^3, t = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2x} = \frac{4}{2}x + 1$$

۶- گزینه‌ی ۴

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 3x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

۷- گزینه‌ی ۲

$$f \text{ در } 1 \text{ پیوسته} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = f'_+(1) = 4 \\ f'_-(1) = f'_+(1) = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 1 & x \leq 1 \\ bx + \frac{1}{2} \ln(2x-1) & x > 1 \end{cases}$$

۸- گزینه‌ی ۴

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & x < 1 \\ b + \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1} & x > 1 \end{cases}$$

$$1 \text{ در } f \text{ شرط پیوستگی} : a - 1 + 1 = b + \frac{1}{2} \ln(1) \Rightarrow a = b$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) : 2a - 1 = b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases}$$

۹- گزینه‌ی ۴

$f'(0)$ و $f''(0)$ هر دو موجود و برابر صفر هستند.

$$f(x) = (x-1)(x+1)|(x-2)(x+1)|$$

۱۰- گزینه‌ی ۴

تابع در $x = -1$ مشتق‌پذیر است ولی در $x = 2$ مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند و نقطه‌ی گوشه‌ی تابع است.

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)(x+1)|x+1||x-2|}{x-2} = -9$$

$$f(x) = |x^2 + 2x|$$

در همسایگی $-\frac{3}{2}$ ، $[x] = -2$ است.

۱۱- گزینه‌ی ۱

در همسایگی $-\frac{3}{2}$ ، $x^2 + 2x < 0$ است.

$$f(x) = -x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = -2x - 2 \Rightarrow f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

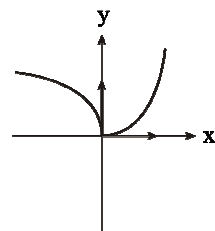
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^2 - \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$$

در همسایگی صفر:

۱۲- گزینه‌ی ۱

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 \quad (0^+)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = -\infty$$



$$f \text{ در } 1 \text{ پیوسته} \Rightarrow f'_-(1) = 5, f'_+(1) = 7$$

۱۳- گزینه‌ی ۳

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-3h) - f(1+h)}{h} = 0$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3f'_-(1-3h) - f'_+(1+h)}{1} = -3f'_-(1) - f'_+(1) = -3(5) - (7) = -22$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ $2y = x + a$ بر f^{-1} مماس است. پس $2x + y + a$ بر f مماس است.

$$x = 2k\pi \text{ و } \cos x = 1 \text{ از معادله‌ی دوم} \Rightarrow \begin{cases} x + \sin x = 2x - a \\ 1 + \cos = 2 \end{cases}$$

می‌شود. پس:

$$2k\pi + \sin(2k\pi) = 2(k\pi) - a = a = 2k\pi$$

$$e^{y-x} + e^{xy} - x - 2 = 0$$

۱۵- گزینه‌ی ۲

$$y' = -\frac{-e^{y-x} + ye^{xy} - 1}{e^{y-x} + xe^{xy}}$$

$$y'(0, 0) = -\frac{-1 + 0 - 1}{1 + 0} = 2$$

$$\text{مماس: } y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$

$$f^{-1}: x = y^3 + y, A(2, 1), y''_A = ?$$

۱۶- گزینه‌ی ۳

$$y' = \frac{1}{3y^2 + 1} \Rightarrow y'_A = \frac{1}{4}$$

$$y'' = -\frac{6yy'}{(3y^2 + 1)^2} \Rightarrow y''_A = \frac{-6\left(\frac{1}{4}\right)}{16} = -\frac{3}{32}$$

$$f^{(4)}(x) = 3(5 \times 4 \times 3 \times 2)x + 5 \times 4!$$

۱۷- گزینه‌ی ۴

$$f^{(4)}(1) = 3 \times 5! + 5 \times 4! = 4 \times 5!$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

۱۸- گزینه‌ی ۴

$$15 \equiv 3 \Rightarrow (\cos)^{(15)} = (\cos)^{13} = \sin$$

$$f^{(15)}(x) = -\frac{1}{2} \times 2^{15} \sin 2x$$

$$f^{(15)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2^{14} \times \sin \frac{\pi}{2} = -2^{14}$$

$$3y - 2x = 5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

۱۹- گزینه‌ی ۲

$$f'(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{3} \Rightarrow -3 \cos x = 2 \sin^2 x \Rightarrow -3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 2, -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

شیب همه‌ی خطوط در گزینه‌ها صفر است.

۲۰- گزینه‌ی ۳

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 x + \sin x(2 + \sin x)}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(x) = \frac{2 + \sin x}{\cos x} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\pm \frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm \sqrt{3}$$

پس خطوط $y = \pm \sqrt{3}$ بر تابع مماس هستند.

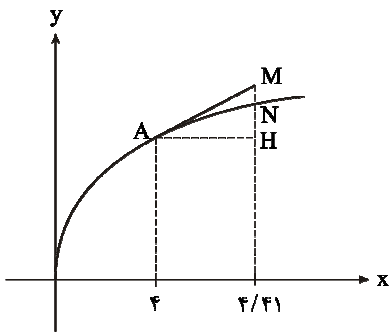
$$f(\alpha) = 4\alpha - \alpha^2, f'(\alpha) = 4 - 2\alpha$$

۲۱- گزینه‌ی ۲

معادله‌ی مماس: $y - (4\alpha - \alpha^2) = (4 - 2\alpha)(x - \alpha)$

$$A(2, 5) \Rightarrow 5 - (4\alpha - \alpha^2) = (4 - 2\alpha)(2 - \alpha) \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, 3$$

$$\begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow B(1, 3) \\ f(3) = 3 \Rightarrow C(3, 3) \end{cases} \Rightarrow |BC| = 2$$



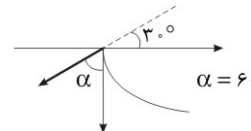
۲۲- گزینه‌ی ۲

$$\text{AM شیب} = f'(4) = \frac{MH}{AH} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{MH}{5/41} \Rightarrow MH = \frac{41}{400}$$

$$NH = f(4, 41) - f(4) = 2/1 - 2 = 0/1$$

$$MN = MH - NH = \frac{41}{400} - \frac{1}{10} = \frac{1}{400} = 0/0025$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{3\sqrt{(1-x)^2}} & x > 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ در } 1 \text{ پیوسته} \begin{cases} f'_+(1) = -\infty \\ f'_-(1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



۲۳- گزینه‌ی ۲

کالا x قیمت فروش $= x \times 70 = 70x$

۲۴- گزینه‌ی ۲

کالا x سود حاصل از فروش $= 70x - c(x)$

$$p(x) = 70x = (100 + 50x + 0/1x^2)$$

$$p(x) = -0.1x^2 + 20x - 1000$$

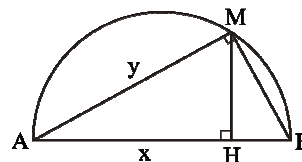
ماکسیمم این تابع درجه‌ی دوم در نقطه‌ای است که مشتق صفر باشد.

$$p'(x) = -0.2x + 20 = 0 \Rightarrow x = 100$$

$$MA^2 = AH \times AB$$

$$y^2 = (9)x \Rightarrow y = 3\sqrt{x}$$

$$y'_t = \frac{3}{2\sqrt{x}} x'_t = \frac{3}{\sqrt{6/25}} \times 0.05 = 0.03$$



۲۵- گزینه‌ی ۲