

زمان پیشنهادی: ۴۵ دقیقه

آزمون کلی از مباحث آزمون‌های قبلی (۱ تا ۱۴)

۱- مجموع اعداد سه رقمی مضرب ۱۱، چند برابر ۱۱۰ است؟

- (۱) ۳۷۵ (۲) ۳۹۵ (۳) ۴۰۵ (۴) ۴۱۵

۲- در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲، مجموع جملات پنجم تا دوازدهم، چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۳۶ (۳) ۲۵۶ (۴) ۲۷۲

۳- با فرض $\log 2 = 0.3$ ، $\log 3 = 0.5$ و $\log 7 = 0.8$ حاصل $\log \frac{49}{3\sqrt[3]{12}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{7}{10}$ (۳) $\frac{11}{15}$ (۴) $\frac{23}{30}$

۴- اگر x ریشه‌ی معادله‌ی $\log_{\delta}^{x^2-1} - 2\log_{\delta}^{2x} = 1$ باشد، مقدار $[x]$ برابر کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۵- اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ را α و β بنامیم، حاصل $\alpha^3 - \beta^2 + 3\beta$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶- اگر معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن یک واحد از مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 3 = 0$ بیش‌تر باشد، به صورت $x^2 + ax + b = 0$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۸

۷- اگر $\tan(a - b) = 2$ و $\tan(a + b) = 3$ باشد، مقدار $\tan 2a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۸- حاصل $\frac{\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a}{\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a}$ با کدام برابر است؟

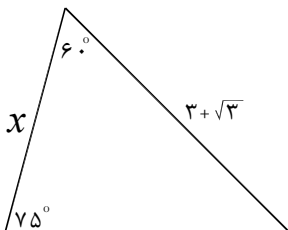
- (۱) $\tan a$ (۲) $\cot a$ (۳) $\tan 2a$ (۴) $\cot 2a$

۹- معادله‌ی $2\sin^2 x = 3\cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰- در شکل مقابل x کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$



۱۱- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟
 (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۱۲- در کدام مجموعه‌ی زیر از اعداد حقیقی، یکی از کران‌های پایین در خود مجموعه است؟
 (۱) $\{x : x|x| \leq -1\}$ (۲) $\{x : [x] = 2\}$ (۳) $\{x : [-x] = -2\}$ (۴) $\{x : 2 - x \geq |x|\}$

۱۳- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{5} < \frac{x}{x^2 + 6} < \frac{1}{7}$ اجتماع دو همسایگی متقارن است، شعاع همسایگی بزرگ‌تر کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۴- به ازای مقادیر $n \geq n_0$ ، فاصله‌ی اعداد دنباله‌ی $\left\{ \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} \right\}$ از عدد همگرایی خود کوچک‌تر از $\frac{1}{4}$ است. کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۵- اگر $a_n = \sqrt{n^2 + n}$ و $b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ ، هر یک از دو دنباله‌ی $\{a_n - b_n\}$ و $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ به ترتیب چگونه‌اند؟
 (۱) همگرا، همگرا (۲) همگرا، واگرا (۳) واگرا، همگرا (۴) واگرا، واگرا

۱۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)^n$ کدام است؟

(۱) \sqrt{e} (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۱۷- کدام توصیف درباره‌ی دنباله‌ی $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2} & n < 10 \\ \frac{2n+1}{3n+2} & n \geq 10 \end{cases}$ صحیح است؟

(۱) همگرا، یکنوا (۲) واگرا، یکنوا (۳) همگرا، غیریکنوا (۴) واگرا، غیریکنوا

۱۸- اگر برای هر دنباله $\{a_n\}$ که در شرط « $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists n \geq M \Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon$ » صدق کند، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به ۳ باشد، کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

(۱) $\{a_n\}$ به ۳ همگراست. (۲) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ (۳) $\{f(a_n)\}$ واگراست. (۴) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

۱۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x < 0 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) موجود نیست.

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3x^2 - x + 14}{x^2 - 4} + \frac{3 - 2x}{x + 2} \right)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۱- حد تابع $f(x) = (2 - \sqrt{x})(\cot \pi x + 1)$ وقتی $x \rightarrow 4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4\pi}$ (۲) $\frac{1}{2\pi}$ (۳) $-\frac{1}{2\pi}$ (۴) $-\frac{1}{4\pi}$

۲۲- اگر $f(x) = \frac{x+11}{x^2 - 3x - 4}$ و $g(x) = \frac{3}{x-4}$ ، نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(4, -1)$ (۴) $(4, 0)$

۲۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۴- تابع $f(x) = [x] - [x^2]$ در بازه‌ی $(0, 2)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵- یکی از جواب‌های معادله‌ی $x = \sqrt{2} \sin x$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(0, \frac{\pi}{6})$ (۲) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ (۴) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

پاسخ کلیدی

۳ (۴)	۳ (۳)	۴ (۲)	۳ (۱)
۴ (۸)	۳ (۷)	۴ (۶)	۱ (۵)
۲ (۱۲)	۱ (۱۱)	۴ (۱۰)	۲ (۹)
۴ (۱۶)	۱ (۱۵)	۳ (۱۴)	۳ (۱۳)
۴ (۲۰)	۳ (۱۹)	۴ (۱۸)	۱ (۱۷)
۲ (۲۴)	۲ (۲۳)	۱ (۲۲)	۴ (۲۱)
			۲ (۲۵)

پاسخ تشریحی - تحلیلی

$$\begin{cases} 11 \times 10 + 11 \times 11 + \dots + 11 \times 90 = \frac{11}{2} (11 \times 10 + 11 \times 90) = 11 \times 11 \times 50 = 405 \times 11 \\ n = 90 - 10 + 1 = 81 \end{cases} \quad \text{۱- گزینه‌ی ۳}$$

$$\frac{t_5 + \dots + t_{12}}{t_1 + \dots + t_4} = \frac{t_5 (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{t_5}{t_1} \times \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = q^4 (q^4 + 1) \quad \text{۲- گزینه‌ی ۴}$$

$q = 2 \Rightarrow$ جواب $= 2^4 (2^4 + 1) = 272$

$$\log \frac{49}{\sqrt[3]{12}} = \log \frac{7^2}{\sqrt[3]{2^2 \times 3}} = 2 \log 7 - \frac{2}{3} \log 2 - \frac{1}{3} \log 3 \approx 2(0.8) - \frac{2}{3}(0.3) - \frac{1}{3}(0.5) \quad \text{۳- گزینه‌ی ۳}$$

$$\log_{\delta} x^2 - 1 - 2 \log_{\delta}^2 x = 1 \Rightarrow \log_{\delta} \frac{x^2 - 1}{2x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2x} = \delta \Rightarrow x^2 - 1 - \delta x = 0$$

$\Rightarrow x = \delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4} \xrightarrow{\text{دامنه‌ی تعریف}} x = \delta + \sqrt{\delta^2 + 4} \Rightarrow [x] = 10$

$$\alpha^2 + \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\alpha + 3 \Rightarrow \alpha^3 = -\alpha^2 + 3\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - \beta^2 + 3\beta = -\alpha^2 + 3\alpha - \beta^2 + 3\beta = -(\alpha^2 + \beta^2) + 3\alpha + 3\beta = -((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + 3(\alpha + \beta)$$

$$= -((-1)^2 - 2(-3)) + 3(-1) = -10$$

$S = \alpha + \beta = 7, P = \alpha\beta = 3$ ۴- گزینه‌ی ۴

$$S' = (\alpha^r + 1) + (\beta^r + 1) = S^r - rP + r = r^r - r(r) + r = 45$$

$$P' = (\alpha^r + 1)(\beta^r + 1) = P^r + S^r - rP + 1 = r^r + r^r - r(r) + 1 = 53$$

$$\Rightarrow x^r - 45x + 53 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -45 \\ b = 53 \end{cases}$$

$$\tan 2a = \tan((a+b) + (a-b)) = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{r+r}{1-r(r)} = -1$$

۷- گزینه‌ی ۳

$$\frac{(\cos a + \cos 3a) + r \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + r \sin 2a} = \frac{r \cos 2a \cos a + r \cos 2a}{r \sin 2a \cos a + r \sin 2a} = \frac{\cos 2a(\cos a + 1)}{\sin 2a(\cos a + 1)} = \cot 2a$$

۸- گزینه‌ی ۴

$$r(1 - \cos^r x) = r \cos x \Rightarrow r \cos^r x + r \cos x - r = 0$$

۹- گزینه‌ی ۲

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{r} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{r} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \boxed{x = \frac{\pi}{r}, \frac{5\pi}{r}} \\ \cos x = -r \text{ جواب ندارد.} \end{cases}$$

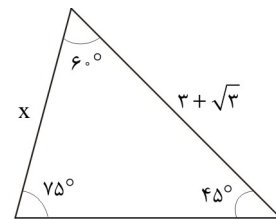
$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{r + \sqrt{3}}{\sin 75^\circ}$$

طبق رابطه‌ی سینوس‌ها در مثلث:

۱۰- گزینه‌ی ۴

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = r\sqrt{3}$$



$$x^r < |x - r| \Rightarrow (x^r)^r < (x - r)^r \Rightarrow x^r - (x - r)^r < 0$$

۱۱- گزینه‌ی ۱

$$(x^r + x - r) \underbrace{(x^r - x + r)}_{\Delta < 0} < 0 \Rightarrow x^r + x - r < 0 \Rightarrow -r < x < r$$

$$(2) \quad \{x : 2 \leq x < 3\} = [2, 3)$$

۱۲- گزینه‌ی ۲

یکی از کران‌های پایین این مجموعه ۲ است که در مجموعه قرار دارد.

$$\begin{cases} \frac{x}{x^r + 6} > \frac{1}{7} \\ \frac{x}{x^r + 6} < \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^r - 7x + 6 < 0 \Rightarrow 1 < x < 6 \\ x^r - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ یا } x > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \in (1, 2) \cup (3, 6)$$

۱۳- گزینه‌ی ۳

$$\Rightarrow \text{همسایگی بزرگ‌تر} (3, 6) \Rightarrow r = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim a_n = 2 \Rightarrow |a_n - 2| < \frac{1}{40}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳

$$\left| \frac{r^n - 1}{r^{n-1} + 3} - 2 \right| < \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{7}{r^{n-1} + 3} < \frac{1}{40} \Rightarrow r^{n-1} > 273 \Rightarrow n-1 \geq 9 \Rightarrow n \geq 10$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \frac{n^2 + 1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) - \left(n + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

۱۵- گزینهی ۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{\frac{n^2 + 1}{n}} = \frac{n \times n}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{2}{3} - n \right) = 1$$

۱۶- گزینهی ۴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)^n = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n(n^2 + 2n - (n+1)^2)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-n}{2n}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

۱۷- گزینهی ۱

$$\left. \begin{aligned} \text{صعودی} &= \frac{1}{(n+2)^2} > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ \text{صعودی} &= \frac{1}{(3n+2)^2} > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ a_9 &= \frac{1}{11} < a_{10} = \frac{21}{32} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{a_n\} \text{ صعودی}$$

برای هر دنباله‌ای $\{a_n\}$ که هم‌گرا به ۲ است، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ هم‌گرا به ۳ است. طبق تعریف حد:

۱۸- گزینهی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(\underbrace{(x^3)}_{\rightarrow 0^-} \underbrace{(x^2 - 1)}_{\rightarrow -1}) = f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = 1$$

۱۹- گزینهی ۳

$$\text{مخرج مشترک: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+4}{x-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

۲۰- گزینهی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} ((2 - \sqrt{x}) \cot \pi x + (2 - \sqrt{x})) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\tan \pi x} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

۲۱- گزینهی ۴

$$\xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\pi(1 + \tan^2 \pi x)} = -\frac{1}{4\pi}$$

$$(f-g)(x) = \frac{x+11}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{x-4} = \frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)}$$

۲۲- گزینه‌ی ۱

$$(f-g)(x) = \frac{-2}{x+1} \Rightarrow \text{مجانب‌ها: } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x) = f(-1) = a+b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x) = 1[1^-] = 0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0$$

۲۳- گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} = f(-1) = -a+b \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} = (-1)[-1^+] = 1 \end{cases} \Rightarrow b-a=1$$

از حل دستگاه $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

$$f(3) = 3a + b = -1$$

$$f(x) = [x] - [x^2]$$

۲۴- گزینه‌ی ۲ نقاط $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و ۱ مورد شک هستند.

ناپیوسته = ناپیوسته - پیوسته : $f: \sqrt{2}, \sqrt{3}, x$

$$x=1 \begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1-1=0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0-0=0 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوسته است.}$$

$$x - \sqrt{2} \sin x = 0$$

۲۵- گزینه‌ی ۲

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x - \sqrt{2} \sin x$	0	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4} - 1$	$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$
		-	-	-	+

طبق قضیه‌ی بولتزانو، f در بازه‌ی $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ریشه دارد.