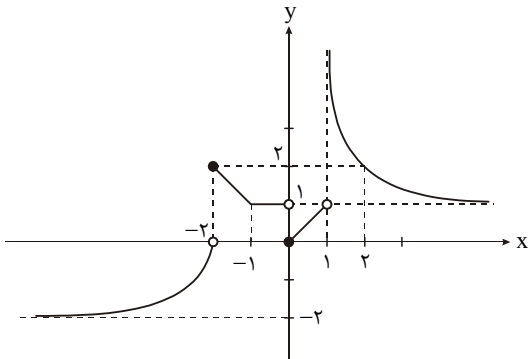


زمان پیشنهادی: ۴۰ دقیقه

دیفرانسیل: حد، پیوستگی و مجانب



۱- با توجه به شکل، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(f(x))]$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

۲- تابع  $g$  در نقطه‌ی ۲ حد ندارد و برای هر  $x$ ،  $|g(x)| < 3$ . اگر بدانیم تابع  $y = f(x)g(x) - g(x)$  در نقطه‌ی  $x = 2$

دارای حد است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۳- برای اثبات عدم وجود حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{\sqrt{x} - 1}$ ، کدام دو دنباله مناسب است؟

- (۱)  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  و  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$
- (۲)  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  و  $\left\{ -\frac{1}{n} \right\}$
- (۳)  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  و  $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$
- (۴)  $\left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}$  و  $\left\{ 1 + \frac{2}{n} \right\}$

۴- اگر  $f(x) = (2x+1)[3x]$  باشد، دنباله‌ی  $\left\{ f\left(\frac{2n+3}{n+2}\right) \right\}$  به کدام عدد همگراست؟

- ۱ (۱)
- ۱۵ (۲)
- ۲۵ (۳)
- ۳۰ (۴)

۵- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x^3 + 1}$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۳)
- $-\frac{1}{2}$  (۴)

۶- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x^2} - 16}$  برابر کدام است؟

- ۱ (۱)
- $+\infty$  (۲)
- $\frac{1}{4}$  (۳)
- $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  (۴)

۷- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{a}{x^2 - 4} + \frac{b}{x^2 + x - 6} \right) = 3$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳۰۰ (۲)
- ۲۴۰ (۳)
- ۳۰۰ (۴)

۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left| \cos \frac{\pi x}{2} \right|}{1 - \sqrt{x}}$  کدام است؟

$\pi$  (۱)       $\frac{\pi}{2}$  (۲)       $-\frac{\pi}{2}$  (۳)       $-\pi$  (۴)

۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \left[ \frac{1}{x-1} \right] - \left[ \frac{1}{x-1} \right]$  کدام است؟

$\circ$  (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)       $+\infty$  (۴)

۱۰- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{(x+x^2)^2 + (1-x^2)^3 - 1}{(x+\sin x)^2}$  کدام است؟

$1$  (۱)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $\circ$  (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

۱۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \circ^+} \left( x \sin \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x^2 + 3x} \right)$  برابر کدام است؟

صفر (۱)       $\frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)      ۱ (۴)

۱۲- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4-x^2}}$  کدام است؟

$8$  (۱)      ۱۲ (۲)      ۱۶ (۳)      ۱۸ (۴)

۱۳- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{x^2}{1-x \cot x}$  کدام است؟

$2$  (۱)      ۳ (۲)       $-3$  (۳)       $-2$  (۴)

۱۴- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 3x + \sin 5x}$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۱)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{4}$  (۳)       $-\frac{1}{4}$  (۴)

۱۵- اگر  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a}{x^2 + ax + 4} = -\infty$  باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

$-4$  (۱)       $-2$  (۲)      ۲ (۳)      ۴ (۴)

۱۶- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^4 + x^3} - x^2}$  کدام است؟

$1$  (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۱۷- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + x + 1)(x^4 - 3x + 2)}{(x^2 - \sqrt{x})\sqrt{5x-1}}$  کدام است؟

$1$  (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۱۸- به‌ازای چند مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + x + a}$  دو خط مجانب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۹- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{\frac{x^3-1}{x^2-1}}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\log_{\frac{3}{2}} 3$  (۴)  $+\infty$

۲۰- نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 - 4x}$  در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟

- (۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

۲۱- از تقاطع مجانب‌های تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + \frac{x^2 + 1}{x - 1}}$ ، یک ناحیه‌ی بسته به‌وجودمی‌آید. مساحت این ناحیه چه قدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۲۲- نقطه‌ی  $A(-3, 2)$  محل تلاقی دو خط مجانب از نموداری به معادله‌ی  $y = \frac{ax^2 + 5}{x^2 + bx + 9}$  است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۳- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & |x| < 2 \\ |x - 3| & |x| \geq 2 \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $-\frac{3}{4}$

۲۴- تابع  $f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \leq -2 \\ [2x] + 1 & -2 < x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \end{cases}$  در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۲۵- یکی از جواب‌های معادله‌ی  $x = \sqrt{2} \sin x$  در کدام بازه است؟

- (۱)  $(0, \frac{\pi}{6})$  (۲)  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  (۳)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$  (۴)  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

### پاسخ کلیدی

۳ (۴)	۳ (۳)	۱ (۲)	۱ (۱)
۴ (۸)	۲ (۷)	۴ (۶)	۳ (۵)
۳ (۱۲)	۲ (۱۱)	۴ (۱۰)	۳ (۹)
۴ (۱۶)	۲ (۱۵)	۴ (۱۴)	۲ (۱۳)
۴ (۲۰)	۱ (۱۹)	۲ (۱۸)	۱ (۱۷)
۲ (۲۴)	۱ (۲۳)	۴ (۲۲)	۳ (۲۱)
			۲ (۲۵)

### پاسخ تشریحی - تحلیلی

۱- گزینه‌ی ۱  $[f(f(-\infty))] = [f(-2^+)] = [2^-] = 1$

۲- گزینه‌ی ۱  $y = f(x) \cdot (f(x) - 1)$

چون  $g$  در نقطه‌ی ۲ حد ندارد ولی کران‌دار است، حد تابع فوق در صورتی موجود است که:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

۳- گزینه‌ی ۳ این حد وجود ندارد چون حد راست و چپ برابر نیست پس دو دنباله‌ی همگرا به یک لازم است که یکی بزرگ‌تر از ۱ و دیگری کوچک‌تر از ۱ باشد.

$$a_n = \frac{2n+3}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow \begin{cases} \lim a_n = 2 \\ a_n < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x+1)[3x] = (2 \times 2 + 1) \times [6^-] = 5 \times 5 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2-x+1) + 3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x^2-16}} + \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-16}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} + \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x+3) + b(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+3)} = 3$$

۷- گزینه‌ی ۲

حد مخرج  $= 0 \Rightarrow$  حد صورت  $= 0 \Rightarrow 5a + 4b = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(a+b)x + (3a+2b)}{x-2} \cdot \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a+b}{1} \times \frac{1}{2 \cdot 5} = 3 \Rightarrow a+b = 6$$

از حل این دستگاه  $a = -24$  و  $b = 30$  می‌شود.

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \frac{\pi x}{2} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} < 0$$

۸- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\pi \sin \frac{\pi x}{2}}{2}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left[ \frac{1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left( \frac{1}{x-1} - \left\{ \frac{1}{x+1} \right\} \right) = 0$$

۹- گزینه‌ی ۳

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x+1 - (x^2 - 1) \left\{ \frac{1}{x-1} \right\} \right) = 2 - (0 \times \text{دار}) = 2$$

$$\lim \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 + 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 - 1}{x^2 \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)^2} = \lim \frac{x^2 (-2 + 2x + 4x^2 - x^4)}{x^2 \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)^2} = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲

$$0 \times \text{دار} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+3)} = 0 + \frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{4 - (4 - x^2)} \cdot (2 + \sqrt{4 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \right) \times 4$$

۱۲- گزینه‌ی ۳

$$= 4 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{x^2} \right) = 4 \left( -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \frac{x}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \tan x}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x}{\frac{x^3}{x}} = 3$$

۱۳- گزینه‌ی ۲

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t$$

۱۴- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + 2t)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2t\right) + \sin\left(\frac{\Delta\pi}{2} + \Delta t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{-\cos 2t + \cos \Delta t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{-\cos 2t + 1 - 1 + \cos \Delta t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 2t}{t^2}}{\frac{1 - \cos 3t}{t^2} - \frac{1 - \cos \Delta t}{t^2}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{9}{2} - \frac{25}{2}} = -\frac{1}{4}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ ریشه مخرج باید مضاعف باشد.

$$\begin{cases} a = 4 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4}{(x+2)^2} = +\infty & \times \\ a = -4 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4}{(x-2)^2} = -\infty & \checkmark \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x}{x(\sqrt{x^2+x}-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{2} + x\right)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۱۶- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x+1}{\sqrt{\Delta x}-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \times \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1$$

۱۷- گزینه‌ی ۱

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{x^2+x+a}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲

چون درجه صورت یک واحد بیش‌تر از مخرج است تابع یک مجانب مایل دارد. پس باید فقط یک مجانب قائم داشته‌باشد.

$$\Delta = 1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

(حالت اول) مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$x^2+x+a=0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow a=0 \\ x=-1 \Rightarrow a=0 \\ x=-2 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

(حالت دوم) صورت و مخرج ریشه مشترک دارند:

به‌ازای  $a=0$  ;  $f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{x^2+x} = x+2$  در این حالت مجانب قائم ندارد. پس جواب مسئله  $a = \frac{1}{4}$  و  $a = -2$  است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(x^3-1)}{\log(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(x-1) + \log(x^2+x+1)}{\log(x-1) + \log(x+1)}$$

۱۹- گزینه‌ی ۱

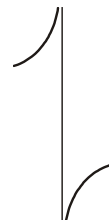
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \frac{1}{\log(x-1)} \cdot \log(x^2+x+1)}{1 + \frac{1}{\log(x-1)} \cdot \log(x+1)} = \frac{1 + \frac{1}{-\infty} \cdot \log 3}{1 + \frac{1}{-\infty} \cdot \log 2} = 1$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x-4)}$$

۲۰- گزینه‌ی ۴

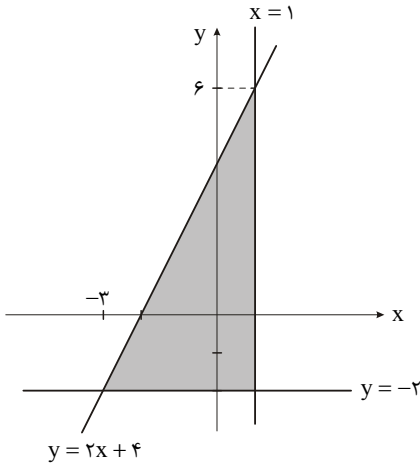
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x-4)} = -\frac{1}{4}$$

$x=0$  مجانب نیست



$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \begin{cases} x \rightarrow 4^+ \frac{\sin 4}{+} = -\infty \\ x \rightarrow 4^- \frac{\sin 4}{-} = +\infty \end{cases}$$

توجه کنید که  $4 > \pi$  و زاویه‌ی ۴ در ربع سوم است و  $\sin 4 < 0$  است.



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} + \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

۲۱- گزینه‌ی ۳

$$\text{مجانب افقی / مایل: } y = \left| x + \frac{6}{2} \right| + (x + 1)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty ; y = 2x + 4 \\ x \rightarrow -\infty ; y = -2 \end{cases}$$

خط  $x = 1$  نیز مجانب قائم است.

$$S = \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

$$\text{مجانب افقی: } y = a \xrightarrow{A(-3, 2)} a = 2$$

۲۲- گزینه‌ی ۴

مجانب قائم از  $A(-3, 2)$  می‌گذرد. پس  $x = -3$  مجانب قائم تابع و بنابراین ریشه‌ی مخرج است.

$$x^2 + bx + 9 = 0 \xrightarrow{x=-3} 9 - 3b + 9 = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + 2 = 1 & \text{بیوستگی در } 2 \\ 4a - 2b + 2 = 5 & \text{بیوستگی در } -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \end{cases}$$

۲۳- گزینه‌ی ۱

$$\left\{ -2, -\frac{3}{2} \right\}$$

۲۴- گزینه‌ی ۲

$$\underbrace{x - \sqrt{2} \sin x = 0}_{f(x)}$$

۲۵- گزینه‌ی ۲

$x$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$0$	$-$	$-$	$-$	$+$

$f$  در بازه‌ی  $\left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$  ریشه دارد.