

زمان پیشنهادی: ۴۰ دقیقه

۱- دیفرانسیل: دنباله

۲- مسابان و ریاضی ۲: مثلثات

۱- حاصل  $\sin(-\frac{41\pi}{3}) + \cos(\frac{107\pi}{6})$  چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) -۱

۲- حاصل  $(1 + \tan 25^\circ)(1 + \tan 2^\circ)$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $2 \tan 2^\circ$  (۴)  $2 \tan 25^\circ$

۳- به جای  $A$  کدام عبارت را قرار دهیم تا حاصل  $A(1 + \tan a \tan 2a)$  مقدار ثابتی باشد؟

- (۱)  $\sin a$  (۲)  $\cos a$  (۳)  $\sin 2a$  (۴)  $\cos 2a$

۴- عبارت  $\sin a + \sin 3a + \sin 9a - \sin 5a$  را به صورت حاصل ضرب سه نسبت مثلثاتی می‌نویسیم. کدام یک از گزینه‌ها در این حاصل ضرب وجود ندارد؟

- (۱)  $\sin 2a$  (۲)  $\cos 2a$  (۳)  $\cos 3a$  (۴)  $\cos 4a$

۵- معادله  $\sin x + \cos^2 2x = \sin^3 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۶- معادله  $\cot\left(\frac{\pi}{3} \cos(2\pi x)\right) = \sqrt{3}$  در بازه  $[0, 2]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷- حاصل  $\sin^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\pi}{5}$  (۲)  $\frac{2\pi}{5}$  (۳)  $-\frac{\pi}{10}$  (۴)  $\frac{3\pi}{10}$

۸- اولین جمله از دنباله  $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{7}, \frac{10}{9}, \frac{13}{11}, \dots$  که در همسایگی به شعاع  $\varepsilon = 0,1$  نقطه‌ی حد آن قرار می‌گیرد، کدام است؟

- (۱) جمله‌ی هفدهم (۲) جمله‌ی هیجدهم (۳) جمله‌ی سی و چهارم (۴) جمله‌ی سی و پنجم

۹- حد دنباله  $a_n = n\sqrt{n^2 + 2n} - (n^2 + n + 1)$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳) -۱ (۴)  $-\frac{3}{2}$

۱۰- برای دنباله‌های  $a_n = [n \sin \frac{1}{n}]$  و  $b_n = [\frac{1}{n} \sin n]$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $\{a_n\}$  همگرا به یک و  $\{b_n\}$  همگرا به صفر است. (۲)  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  هر دو همگرا به صفر هستند.

(۳)  $\{a_n\}$  واگرا و  $\{b_n\}$  همگرا به صفر است. (۴)  $\{a_n\}$  همگرا به صفر و  $\{b_n\}$  واگراست.

۱۱-۱۱ - حد دنباله‌ی  $a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$

۱۲- حد دنباله‌ی  $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$  کدام است؟

- (۱)  $e$  (۲)  $\frac{1}{e}$  (۳)  $e^2$  (۴)  $\frac{1}{e^2}$

۱۳- دنباله‌ی  $\dots \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}$

- (۱) واگرا، کران‌دار (۲) همگرا، یکنوا (۳) یکنوا، کران‌دار (۴) همگرا، غیریکنوا

۱۴- کدام توصیف درباره‌ی دنباله‌ی  $a_n = \frac{n \sin(n)}{n+1}$  صحیح است؟

- (۱) همگرا، کران‌دار (۲) واگرا، کران‌دار (۳) همگرا، بی‌کران (۴) واگرا، بی‌کران

۱۵-۱۵ - کوچک‌ترین بازه‌ای که جملات دنباله‌ی  $\left\{ \frac{n^2 + 11}{n^2 - 39} \right\}$  برای  $n \geq 17$  در آن قرار می‌گیرند، کدام است؟

- (۱)  $(0, 1, 2)$  (۲)  $[0, 1, 2)$  (۳)  $(1, 1, 2]$  (۴)  $(1, 1, 4]$

۱۶-۱۶ - اگر  $A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  باشد، حاصل  $\sup(A) - \inf(A)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۷-۱۷ - اگر  $\{a_n\}$  دنباله‌ای همگرا باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر ممکن است همگرا باشد؟

- (۱)  $\{a_n + (-1)^n\}$  (۲)  $\left\{ \frac{(-1)^n}{a_n} \right\}$  (۳)  $\{(-1)^n a_n\}$  (۴)  $\left\{ \frac{a_n^2 + 1}{(-1)^n} \right\}$

۱۸-۱۸ - تمام جملات دنباله‌ی  $\{a_n\}$  عدد طبیعی هستند. اگر  $a_6 = 65$ ،  $a_5 = 16$  و  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n^2$  باشد، مقدار

$a_1 + a_4$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹-۱۹ - اگر برای دنباله‌ی  $\{a_n\}$  بدانیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{a_n + 3} = 3$ ، حد دنباله‌ی  $\{a_n\}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) -۸ (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۰- اگر دنباله‌ی  $x_n = \frac{(2a-1)n^b + 4n^3 + 1}{\binom{n}{3}}$  همگرا به ۶ باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۴ (۴) ۲

۲۱- حاصل حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} - 4^n}{2^{2n+1} + 9^{n-1}}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۲۷

۲۲- حد دنباله‌ی  $a_n = \frac{2^{n+1}}{(2 - \frac{1}{n})^n}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $e^2$  (۳)  $2e$  (۴)  $2\sqrt{e}$

۲۳- کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی  $\left\{ \tan^{-1} \frac{n^2 - 1}{2 - n} \right\}$  صحیح است؟

- (۱) همگرا به  $\frac{\pi}{2}$  (۲) همگرا به  $-\frac{\pi}{2}$  (۳) واگرا (۴) همگرا به  $-\frac{\pi}{4}$

۲۴- دنباله‌ای با کدام یک از ویژگی‌های زیر وجود دارد؟

- (۱) همگرا، بی کران، یکنوا  
(۲) واگرا، کران دار، یکنوا  
(۳) همگرا، بی کران، غیر یکنوا  
(۴) واگرا، بی کران، غیر یکنوا

۲۵- کدام دو دنباله برای این که نشان دهیم گزاره‌ی «مجموع هر دو دنباله واگرا، واگراست» نادرست است، مثال نقض

مناسبی هستند؟

- (۱)  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  و  $\{2n\}$   
(۲)  $\left\{ \frac{1-2n^2}{n} \right\}$  و  $\{2n\}$   
(۳)  $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$  و  $\left\{ \frac{1-2n^2}{n} \right\}$   
(۴)  $\{(-1)^n\}$  و  $\{\cos n\pi\}$

### پاسخ کلیدی

۲ (۴)	۴ (۳)	۲ (۲)	۲ (۱)
۲ (۸)	۳ (۷)	۴ (۶)	۲ (۵)
۲ (۱۲)	۴ (۱۱)	۴ (۱۰)	۴ (۹)
۱ (۱۶)	۳ (۱۵)	۲ (۱۴)	۴ (۱۳)
۴ (۲۰)	۳ (۱۹)	۳ (۱۸)	۳ (۱۷)
۴ (۲۴)	۲ (۲۳)	۴ (۲۲)	۴ (۲۱)
			۲ (۲۵)

### پاسخ تشریحی - تحلیلی

$$\sin\left(-14\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(18\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{۱- گزینه‌ی ۲}$$

$$\tan 25^\circ = \tan(45^\circ - 20^\circ) = \frac{1 - \tan 20^\circ}{1 + \tan 20^\circ} \quad \text{۲- گزینه‌ی ۲}$$

$$\Rightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = (1 + \tan 20^\circ)\left(1 + \frac{1 - \tan 20^\circ}{1 + \tan 20^\circ}\right) = (1 + \tan 20^\circ) + (1 - \tan 20^\circ) = 2$$

$$1 + \tan a \cdot \tan 2a = 1 + \frac{\sin a \sin 2a}{\cos a \cos 2a} = \frac{\cos a \cos 2a + \sin a \sin 2a}{\cos a \cos 2a} = \frac{\cos(2a - a)}{\cos a \cos 2a} = \frac{1}{\cos 2a} \quad \text{۳- گزینه‌ی ۴}$$

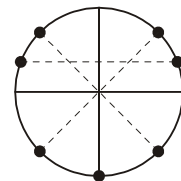
$$(\sin a + \sin 3a)(\sin 9a - \sin 5a) = (2 \sin 2a \cos a) + (2 \sin 2a \cos 7a) = \quad \text{۴- گزینه‌ی ۲}$$

$$2 \sin 2a (\cos a + \cos 7a) = 2 \sin 2a (2 \cos 4a \cos 3a) = 4 \sin 2a \cos 3a \cos 4a$$

$$\cos^2 2x = \sin x (1 - 2 \sin 2x) \quad \text{۵- گزینه‌ی ۲}$$

$$\cos^2 2x = \sin x \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = -1, \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{array} \right.$$



۷ نقطه روی دایره مثلثاتی پس ۷ ریشه در  $[0, 2\pi]$  دارد.

$$\cot \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{۶- گزینه‌ی ۴}$$

$$\frac{\pi}{3} \cos(2\pi x) = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos(2\pi x) = 3k + \frac{1}{6}$$

چون  $-1 \leq \cos(2\pi x) \leq 1$  است و  $k \in \mathbb{Z}$  پس  $k$  فقط می‌تواند ۰ باشد.

$$k = 0 \Rightarrow \cos(2\pi x) = \frac{1}{6} \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = n \pm \frac{1}{12}$$

$$x \in [0, 2] \Rightarrow x = \frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{12}, 1 - \frac{1}{12}, 2 - \frac{1}{12}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{6}\right) = -\cos \frac{2\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{۷- گزینه‌ی ۳}$$

$$\text{جواب} = \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$a_n = \frac{1 + (n-1)^3}{3 + (n-1)^2} = \frac{3n-2}{2n+1} \quad \text{۸- گزینه‌ی ۲}$$

$$\lim a_n = \frac{3}{2}$$

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{-7}{4n+2}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow 4n+2 > 70 \Rightarrow n > 17$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2n} - (n+1)) = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 2n - (n+1)^2)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1} = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n} = -\frac{3}{2} \quad \text{۹- گزینه‌ی ۴}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{۱۰- گزینه‌ی ۴}$$

$$\sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow n \sin \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \sin \frac{1}{n}\right] = [1^-] = 0$$

از طرفی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(n) = 0 \times \text{کران‌دار} = 0$$

در  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sin(n)$  بین اعداد مثبت و منفی نوسان می‌کند. پس  $\left[\frac{\sin(n)}{n}\right]$  بین دو عدد  $-1$  و  $0$  نوسان می‌کند و اگر است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{n\pi} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{n}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(2\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 2\pi \quad \text{۱۱- گزینه‌ی ۴}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n) = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right)n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n+2}} = e^{-1} \quad \text{۱۲- گزینه‌ی ۲}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 1 + 0 = 0 \quad \text{۱۳- گزینه‌ی ۴}$$

این دنباله همگراست پس کران‌دار است. واضح است که غیریکنواست.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \sin(n)$$

۱۴- گزینه‌ی ۲

دنباله‌ی  $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$  همگرا به ۱ و کران‌دار است. دنباله‌ی  $\{\sin(n)\}$  واگرای نوسانی و کران‌دار است. پس  $\{a_n\}$  واگراست ولی کران‌دار است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ تابع  $f(x) = \frac{x^2 + 11}{x^2 - 39}$  با فرض  $x \geq 17$  پیوسته است و  $f'(x) = \frac{-1 \cdot x}{(x^2 - 39)^2} < 0$  است. بنابراین این

$$\boxed{a_{17} = 1/2 \quad \searrow \quad \lim a_n = 1}$$

دنباله برای  $n \geq 17$  نزولی است.

بنابراین جملات دنباله در بازه‌ی  $[1/2, 1)$  قرار دارند.

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{زوج } n \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$$

۱۶- گزینه‌ی ۱

$$\max(a_n) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \min(a_n) = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ اگر  $\{a_n\}$  همگرا به صفر باشد، چون  $\{(-1)^n\}$  کران‌دار است،  $\{(-1)^n a_n\}$  همگرا می‌شود.

$$a_6 = a_5 + a_6^2 \Rightarrow 65 = 16 + a_6^2 \Rightarrow a_6 = 7$$

۱۸- گزینه‌ی ۳

$$a_5 = a_4 + a_5^2 \Rightarrow 16 = 7 + a_5^2 \Rightarrow a_5 = 3$$

$$a_4 = a_3 + a_4^2 \Rightarrow 7 = 3 + a_4^2 \Rightarrow a_4 = 2$$

$$a_3 = a_2 + a_3^2 \Rightarrow 3 = 2 + a_3^2 \Rightarrow a_3 = 1$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{a_n + 3} = 3 \Rightarrow \frac{2L + 1}{L + 3} = 3 \Rightarrow L = -8$$

برای اثبات همگرایی کافی است فرض کنیم  $b_n = \frac{2a_n + 1}{a_n + 3}$  و  $a_n$  را برحسب  $b_n$  بیابیم:

$$a_n = \frac{-3b_n + 1}{b_n - 2}$$

چون  $\{b_n\}$  همگرا به ۳ است پس  $\{a_n\}$  نیز همگراست.

۲۰- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a-1)n^b + 4n^3}{n(n-1)(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a-1)n^b + 4n^3}{\frac{1}{6}n^3}$$

اگر  $b > 3$  باشد این حد  $\infty$  است و اگر  $b < 3$  باشد حاصل حد  $\frac{4}{\frac{1}{6}} = 24$  می‌شود که خلاف فرض است. پس:  $\boxed{b = 3}$

$$\lim \frac{(2a-1)n^3 + 4n^3}{\frac{1}{6}n^3} = \frac{2a+3}{\frac{1}{6}} = 6(2a+3)$$

$$6(2a+3) = 6 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 9^n - 4^n}{2 \times 4^n + \frac{1}{9} \times 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n \left( 3 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right)}{9^n \left( 2 \left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{1}{9} \right)} = \frac{3 - 0}{0 + \frac{1}{9}} = 27$$

۲۱- گزینه‌ی ۴

$$a_n = 2 \times \frac{2^n}{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^n} = 2 \times \left(\frac{2}{\frac{2n-1}{n}}\right)^n = 2 \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n$$

۲۲- گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n) = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-1} - 1\right)n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim a_n = 2\sqrt{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1} \left( \frac{n^2}{-n} \right) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

۲۳- گزینه‌ی ۲

۲۴- گزینه‌ی ۴

- ۱- هر دنباله همگرا، کران‌دار است. وجود ندارد.
- ۲- هر دنباله‌ی کران‌دار و یکتوا، همگراست. وجود ندارد.
- ۳- هر دنباله همگرا کران‌دار است. وجود ندارد.

۴-  $\{(-1)^n n\}$

$$a_n = \frac{1-2n^2}{n} = \frac{1}{n} - 2n \text{ واگرا}$$

$$b_n = 2n \text{ واگرا}$$

$$a_n + b_n = \frac{1}{n} \text{ همگرا}$$

۲۵- گزینه‌ی ۲