

زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

۱- ریاضی ۲: تصاعد، لگاریتم، معادله‌ی درجه دوم

۲- مسابان: تصاعد، معادله‌ی درجه دوم، پنجمه‌ای‌ها و بخش‌پذیری

۱- در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع 20 جمله‌ی اول چه قدر افزوده خواهد شد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

۲- در یک تصاعد حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند ($a_7 + a_8 = 0$) و جمله‌ی هفتم برابر چهار است ($a_7 = 4$). مجموع هشت جمله‌ی اول چه قدر است؟

- (۱) ۱۸ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) -۸

۳- در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{5}{32}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۴- حاصل $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک تصاعد حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد هندسی باشند، قدرنسبت تصاعد هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۶- اگر $\log_b^a = \frac{3}{2}$ ، آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۷- از معادله‌ی $\log_2 30 - \log_2 x = \log_2 (2x - 1) + \log_2 (x + 3)$ مقدار \log_8^x کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۸- اگر $\log_{1/2}^3 = a$ باشد، $\log_{1/2}^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a-1}{2a}$ (۲) $\frac{1-a}{2a}$ (۳) $\frac{1-a}{a}$ (۴) $\frac{a-1}{a}$

۹- کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{100} > \log_{\frac{1}{2}}^{1000}$ (۲) $\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^2$ (۳) $\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^5$ (۴) $\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^2$

۱۰- حاصل $[\log_{\frac{1}{e}} 2] + [\log_{\frac{1}{e}} 3]$ برابر با کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۱- به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع با ضابطه $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

- ۱ (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴)

۱۲- در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیش‌تر باشد، m کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{59}{5}$ (۲) $\frac{63}{5}$ (۳) $\frac{59}{4}$ (۴) $\frac{63}{4}$

۱۳- در معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، حاصل $\sqrt{x_1^2 (3x_2 - 1)}$ چقدر است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۴- اگر $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ باشد، حاصل $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $2\sqrt[4]{3}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\sqrt[4]{3}$

۱۵- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۶- در بسط دو جمله‌ای $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{15}$ ضریب جمله‌ی مستقل از x کدام است؟

- ۱ (۱) ۲۰۰۲ (۲) ۲۰۵۳ (۳) ۳۰۰۳ (۴) ۳۰۵۲

۱۷- بسط $2 - (x-1)^{15} + (x+1)^{15}$ چند جمله دارد؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۱۸- باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ است، a کدام است؟

- ۱ (۱) -4 (۲) -1 (۳) ۱ (۴) ۴

۱۹- باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $1 + x^{15} + x^{30} + x^{45} + \dots + x^{225} + x + 1$ بر $x^2 + x + 1$ برابر است با:

- ۱ (۱) $x + 1$ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) $x + 2$

۲۰- در تقسیم عبارت $x^3 + (x+2)(x-2)^2 - 4x^2$ خارج قسمت چقدر است؟

- ۱ (۱) $x^2 - 2x$ (۲) $x - 2$ (۳) $2x - 2$ (۴) $2x - 4$

پاسخ کلیدی

۲ (۴)	۲ (۳)	۴ (۲)	۴ (۱)
۲ (۸)	۲ (۷)	۴ (۶)	۴ (۵)
۴ (۱۲)	۳ (۱۱)	۲ (۱۰)	۱ (۹)
۳ (۱۶)	۴ (۱۵)	۱ (۱۴)	۳ (۱۳)
۳ (۲۰)	۱ (۱۹)	۲ (۱۸)	۱ (۱۷)

پاسخ تشریحی - تحلیلی

۱- گزینه‌ی ۴ روش ۱: وقتی یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، به جمله‌ی دوم یک واحد، به جمله‌ی سوم دو واحد، ... و به جمله‌ی بیستم ۱۹ واحد اضافه می‌شود، پس جمع ۲۰ جمله‌ی اول به اندازه‌ی $19 \times 20 = 380$ افزایش می‌یابد.

روش ۲: اگر جمله‌ی عمومی این تصاعد را $\{t_n\}$ ، قدرنسبت آن را d ، مجموع n جمله‌ی اول آن را S_n و مجموع n جمله‌ی اول آن را پس از اضافه‌شدن قدرنسبت، S'_n بنامیم:

$$\begin{cases} S_{20} = \frac{20}{2}(2a + 19d) = 20a + 190d \\ S'_{20} = 20a + 190(d+1) = 20a + 190d + 190 \end{cases} \Rightarrow S'_{20} = S_{20} + 190$$

۲- گزینه‌ی ۴ اگر قدرنسبت این تصاعد را d و مجموع n جمله‌ی اول آن را S_n بنامیم:

$$\begin{cases} a_7 + a_8 = 0 \\ a_7 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d + a + 7d = 0 \\ a + 6d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{8}{2}(2a + 7d) = 4(-16 + 14) = -8$$

۳- گزینه‌ی ۲ اگر جمله‌ی عمومی این تصاعد را $\{t_n\}$ ، قدرنسبت آن را q و مجموع n جمله‌ی اول آن را S_n فرض کنیم، طبق فرض مسئله:

$$\begin{aligned} S_8 = \frac{8}{4}S_4 &\Rightarrow \frac{t_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{8}{4} \frac{t_1(q^4 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = \frac{8}{4} \Rightarrow q^4 + 1 = \frac{8}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{t_7}{t_1} = q^{7-1} = q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

۴- گزینه‌ی ۲ برانتز اول تصاعد هندسی با قدر نسبت x و برانتز دوم تصاعد هندسی با قدر نسبت $-x$ است، پس حاصل آن برابر است با:

$$\frac{1(1-x^9)}{1-x} \cdot \frac{1(1-(-x)^9)}{1-(-x)} = \frac{1-x^9}{1-x} \cdot \frac{1+x^9}{1+x} = \frac{1-x^{18}}{1-x^2} = \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^9}{1-2} = 511$$

۵- گزینه‌ی ۴ با فرض این‌که a جمله‌ی اول و d قدرنسبت تصاعد حسابی باشد، جملات چهارم، ششم و دوازدهم آن به ترتیب $a + 3d$ ، $a + 5d$ و $a + 11d$ هستند که چون باید تشکیل تصاعد هندسی دهند، باید داشته‌باشیم:

$$(a + 5d)^2 = (a + 3d)(a + 11d) \Rightarrow a^2 + 10ad + 25d^2 = a^2 + 14ad + 33d^2$$

$$\Rightarrow 4ad = -8d^2 \Rightarrow a = -2d$$

با جای‌گذاری $a = -2d$ جملات متوالی تصاعد هندسی عبارتند از:

$$-2d + 3d, -2d + 5d, -2d + 11d \Rightarrow d, 3d, 9d$$

پس قدرنسبت تصاعد هندسی برابر $q = 3$ است.

۶- گزینه‌ی ۴ $\log_{\sqrt{b}} ab^2 = \log_{\frac{1}{b^2}} a + \log_{\frac{1}{b^2}} b^2 = 2 \log_{\frac{1}{b^2}} a + \frac{2}{\frac{1}{b^2}} = 2 \left(\frac{2}{2} \right) + 4 = 7$

۷- گزینه‌ی ۲ $\log(2x - 1) + \log(x + 3) = \log 30 - \log 2$

$$\Rightarrow \log(2x - 1)(x + 3) = \log \frac{30}{2} \Rightarrow (2x - 1)(x + 3) = 15$$

$$2x^2 + 5x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x + 9) = 0 \Rightarrow x = 2, -\frac{9}{2}$$

$\log_{\frac{x}{8}} = \log_{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$ در دامنه‌ی لگاریتم‌ها نیست، پس ریشه‌ی معادله $x = 2$ است. پس:

۸- گزینه‌ی ۲ $\log_{\frac{3}{2}}^2 = a \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}}^{12} = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}}^4 + \log_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow 2 \log_{\frac{3}{2}}^2 + 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow 2 \log_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1-a}{2a}$$

می‌دانیم تابع $f(x) = \log_a^x$ برای $a > 1$ صعودی و برای $0 < a < 1$ نزولی است. پس:

۹- گزینه‌ی ۱

۱: $100 > \frac{1}{100} \xrightarrow{0 < \frac{1}{2} < 1} \log_{\frac{1}{2}}^{100} < \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}$

۲: $\log_{\frac{1}{2}}^3 = -\log_2^3 < 0, \log_{\frac{2}{3}}^2 > 0 \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^2 > \log_{\frac{1}{2}}^3$

۳: $\log_{\frac{2}{5}}^3 < 1, \log_{\frac{5}{3}}^5 > 1 \Rightarrow \log_{\frac{5}{3}}^5 > \log_{\frac{2}{5}}^3$

۴: $3 > 2 \xrightarrow{0 < \frac{1}{2} < 1} \log_{\frac{1}{2}}^3 < \log_{\frac{1}{2}}^2$

$$\begin{cases} 6 < 2 < 6^1 \Rightarrow 0 < \log_6^2 < 1 \Rightarrow \left[\log_6^2 \right] = 0 \\ 2^2 < 6 < 2^3 \Rightarrow 2 < \log_2^6 < 3 \Rightarrow \left[\log_2^6 \right] = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\log_6^2 \right] + \left[\log_2^6 \right] = 0 + 2 = 2$$

۱۰- گزینه‌ی ۲

شرط مماس بودن f بر محور x ها این است که $\Delta = 0$ باشد.

۱۱- گزینه‌ی ۳

$$\Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2}$$

شرط اینکه نمودار f بالای محور x ها باشد.

$$m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک دو رابطه‌ی فوق $m = \frac{5}{2}$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۴ روش ۱، اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم طبق فرض باید $\alpha = \beta + 2$ باشد. بنابراین $\alpha - \beta = 2$:

$$\alpha - \beta = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{225 - 12m}}{3} = 2 \Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

روش ۲: اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم:

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ \alpha + \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \beta + 2 + \beta = 5 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{21}{4} \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2(3x_2 - 1)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2} = |x_1 x_2| = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{۱۳- گزینه‌ی ۳}$$

مجموع ضرایب این معادله صفر است. پس ریشه‌های این معادله عبارتند از: $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3}$ **۱۴- گزینه‌ی ۱**

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = |1 - \sqrt{3}| + 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\text{محور تقارن: } x = \frac{-1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow 4a - 4 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \quad \text{۱۵- گزینه‌ی ۴}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, 6$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ در این بسط فرم کلی جمله‌ی عمومی به صورت زیر است:

$$\binom{15}{k} x^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = \binom{15}{k} x^{15-k} x^{-\frac{k}{2}} = \binom{15}{k} x^{15-\frac{3k}{2}}$$

برای این که جمله مستقل از x باشد باید $15 - \frac{3k}{2} = 0$ شود، یعنی $k = 10$ باشد، پس جمله‌ی مستقل از x برابر است با:

$$\binom{15}{10} = \binom{15}{5} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به رابطه‌ی بسط دو جمله‌ای نیوتن:

$$(x+1)^{10} = x^{10} + \binom{10}{1}x^9 + \binom{10}{2}x^8 + \dots + \binom{10}{9}x + 1$$

$$(x-1)^{10} = x^{10} - \binom{10}{1}x^9 + \binom{10}{2}x^8 - \dots - \binom{10}{9}x + 1$$

از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$(x+1)^{10} + (x-1)^{10} - 2 = 2x^{10} + 2\binom{10}{2}x^8 + 2\binom{10}{4}x^6 + 2\binom{10}{6}x^4 + 2\binom{10}{8}x^2 + 2 - 2$$

$$\Rightarrow (x+1)^1 + (x-1)^1 - 2 = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

و همان‌طور که می‌بینیم این بسط ۵ جمله دارد.

۱۸- گزینه‌ی ۲ با فرض $f(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ و با توجه به این که ریشه‌ی $x+1=0$ برابر $x=-1$ است، باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای f بر $x+1$ برابر است با:

$$R = f(-1) = 1 + a + 1 - 2a + 1 = 3 - a \Rightarrow 3 - a = 4 \Rightarrow a = -1$$

۱۹- گزینه‌ی ۱ در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی $x^2 + x + 1$ ، می‌توان نوشت:

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \xrightarrow{\times(x-1)} x^3 - 1 \equiv 0 \Rightarrow x^3 \equiv 1$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3)^1 + (x^3)^2 \cdot x^2 + (x^3)^3 \cdot x + 1 \equiv 1 + x^2 + x + 1 = 1 + (x^2 + x + 1) \equiv 1 + 0 \equiv 1$$

بنابراین:

۲۰- گزینه‌ی ۳

$$(x-2)^2(x+2) + x^3 = (x-2)(x-2)(x+2) + x^3 - 4x + 4x = (x^2 - 4)(x+2) + x(x^2 - 4) - 4x$$

$$\Rightarrow (x-2)^2(x+2) + x^3 = (x^2 - 4)(2x+2) - 4x$$

بنابراین در این تقسیم خارج‌قسمت $Q(x) = 2x + 2$ و باقی‌مانده‌ی $R(x) = -4x$ است.