

«زمان پیشنهادی: ۴۵ دقیقه»

۱- ریاضی ۱: کل کتاب

۲- مسابان و ریاضی ۲: مطالب مربوط به قدرمطلق، جزء صمیع، تبدیل در نمودارها

۳- دیفرانسیل: فصل صفر، یادآوری مفاهیم پایه

(توضیح: در کنگور سراسری از کتاب ریاضی ۱ سوال طرح نمی‌شود ولی بدیهی است که مطالب کتاب ریاضی ۱ که بیش‌تر مماسبات ریاضی هستند، بیش‌نیاز هر قسمت دیگری از (ریاضیات می‌باشند. ضمناً در فصل اول کتاب دیفرانسیل مطالبی مرتبط با کتاب (ریاضیات سال اول وجود دارد.)

۱- علی و رضا به کمک هم می‌توانند در ۱۰ روز نقاشی یک ساختمان را انجام دهند. همین کار را علی به تنهایی در ۱۵ روز می‌تواند به پایان برساند. اگر رضا تنها باشد، نقاشی ساختمان چند روز طول می‌کشد؟

- ۱۲ (۱)      ۱۵ (۲)      ۲۰ (۳)      ۳۰ (۴)

۲- اگر  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$  باشد، مقدار  $x^2 + \frac{1}{x}$  با کدام برابر است؟

- ۲۳ (۱)      ۳۷ (۲)      ۴۳ (۳)      ۴۷ (۴)

۳- حاصل  $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$  با کدام برابر است؟

- ۲ +  $\sqrt{3}$  (۱)      ۲ -  $\sqrt{3}$  (۲)       $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$  (۳)       $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$  (۴)

۴- از دو معادله  $x + y = 10$  و  $x^3 + y^3 = 370$ ، مقدار  $x^2 + y^2$  کدام است؟

- ۵۶ (۱)      ۵۷ (۲)      ۵۸ (۳)      ۵۹ (۴)

۵- هرگاه  $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 8^a$  باشد، مقدار  $a$  برابر کدام است؟

- $\frac{1}{9}$  (۱)       $\frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{1}{6}$  (۳)      ۱ (۴)

۶- اگر  $|a| < |b|$  و  $b^3$  عدد منفی باشد، کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

- $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  (۱)       $a < b$  (۲)       $a > b$  (۳)       $a^2 > b^2$  (۴)

۷- اگر برای اعداد حقیقی مثبت  $x$  و  $y$  رابطه‌ی  $x + y = 4$  برقرار باشد، کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

- $x^2 + y^2 \geq 12$  (۱)       $x^2 + y^2 \geq 8$  (۲)       $x^2 + y^2 \leq 12$  (۳)       $x^2 + y^2 \leq 8$  (۴)

۸- اگر رابطه‌ی  $\frac{a(\sqrt{b}-3)}{\sqrt{3}-3} = \frac{1}{3}$  به‌زای دو عدد گویای  $a$  و  $b$  برقرار باشد، مقدار  $ab$  برابر کدام است؟

- ۰ (۱)      ۱ (۲)      ۳ (۳)      ۹ (۴)

۹- کدام عدد زیر وجود دارد؟

- (۱) بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از  $\frac{1}{4}$   
 (۲) کوچک‌ترین عدد گنگ بزرگ‌تر از  $\sqrt{2}$   
 (۳) کوچک‌ترین عدد صحیح کم‌تر از  $\sqrt{10}$   
 (۴) بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیش‌تر از  $-\sqrt{10}$

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \exists xy = 0$   
 (۲)  $\exists y \in \mathbb{R} \exists (\forall x \in \mathbb{R}, xy = 0)$   
 (۳)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \exists x + y = 3$   
 (۴)  $\exists y \in \mathbb{R} \exists (\forall x \in \mathbb{R}, x + y = 3)$

۱۱- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) هر مجموعه‌ی کران‌دار از بالا از اعداد حقیقی عضو ماکسیمم دارد.  
 (۲) هر مجموعه‌ی کران‌دار از اعداد حقیقی هم عضو ماکسیمم دارد و هم عضو می‌نیمم.  
 (۳) هر مجموعه‌ی کران‌دار از بالا از اعداد صحیح عضو ماکسیمم دارد.  
 (۴) هر مجموعه‌ای که دارای می‌نیمم است، کران‌دار نیز می‌باشد.

۱۲- بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 8\}$  برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۸

۱۳- به ازای کدام  $k$ ، معادله‌ی  $|x-1| + 2|x| - |x+2| = k$  دارای بی‌شمار ریشه است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۴- حاصل جمع کلیه اعداد صحیحی که در رابطه‌ی  $|x-2| + |x+2| < 100$  صدق می‌کنند کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۵۰۵۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) -۱۰۲

۱۵- مجموعه جواب نامعادله‌ی  $x(x-2) > 3$  را به صورت  $|x-\alpha| > \beta$  نوشته‌ایم. دوتایی مرتب  $(\alpha, \beta)$  کدام است؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) (۲, ۱) (۳) (-۱, ۲) (۴) (-۲, ۱)

۱۶- هرگاه  $(a-1, 5a+3)$  یک همسایگی متقارن به مرکز ۱۰ باشد، شعاع این همسایگی کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۷- همسایگی متقارن به مرکز ۲ و شعاع ۲۴ زیر مجموعه‌ی همسایگی متقارن به مرکز ۱ و شعاع ۵-۳۴ است. مجموعه

مقادیر  $\epsilon$  کدام است؟

- (۱)  $\epsilon \geq 6$  (۲)  $\epsilon \geq 4$  (۳)  $\epsilon \leq 6$  (۴)  $\epsilon \leq 4$

۱۸- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x-1}{3}$  کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۹ (۳) -۸ (۴) -۷

۱۹- مجموعه‌ی مقادیر  $x$  که در رابطه‌ی  $\lfloor |x| \rfloor = \lfloor 1 + [x] \rfloor$  صدق می‌کند، کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 1) - \mathbb{Z}$  (۲)  $(-\infty, 0) - \mathbb{Z}$  (۳)  $\mathbb{Z} - (\mathbb{N} \cup \{0\})$  (۴)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۲۰- سطح محدود به نقاط مجموعه‌ی  $\{(x, y) : [x]^2 + [y]^2 \leq 5\}$  کدام است؟

- ۱۹ (۱)                      ۲۰ (۲)                      ۲۱ (۳)                      ۲۲ (۴)

۲۱- مساحت محدود به نمودار تابع  $y = 4 - |x|$  و محور  $x$  ها کدام است؟

- ۴ (۱)                      ۶ (۲)                      ۸ (۳)                      ۱۲ (۴)

۲۲- معادله‌ی محور تقارن نمودار  $y = |x - 1| + |x + 3|$  کدام است؟

- $x = 1$  (۱)                       $x = 2$  (۲)                       $x = -1$  (۳)                       $x = -2$  (۴)

۲۳- نمودار تابع  $f(x) = 2x + |x - 1|$  از چند ناحیه‌ی مختصات عبور می‌کند؟

- ۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)                      ۴ (۴)

۲۴- مجموعه‌ی  $A = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$  نسبت به کدام عمل بسته است؟

- ۱) جمع                      ۲) تفریق                      ۳) ضرب                      ۴) تقسیم

۲۵- اگر  $a$  عدد طبیعی یک رقمی و  $b$  عدد طبیعی و  $\sqrt[4]{a} = \frac{b}{4}$  باشد، حاصل  $a + b$  کدام است؟

- ۱۱ (۱)                      ۱۲ (۲)                      ۱۳ (۳)                      ۱۴ (۴)

### پاسخ کلیدی

۳ (۴)	۱ (۳)	۴ (۲)	۴ (۱)
۲ (۸)	۲ (۷)	۳ (۶)	۱ (۵)
۲ (۱۲)	۳ (۱۱)	۴ (۱۰)	۴ (۹)
۳ (۱۶)	۱ (۱۵)	۱ (۱۴)	۲ (۱۳)
۳ (۲۰)	۲ (۱۹)	۴ (۱۸)	۱ (۱۷)
۳ (۲۴)	۳ (۲۳)	۳ (۲۲)	۳ (۲۱)
			۲ (۲۵)

### پاسخ تشریحی - تحلیلی

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 30 \quad \text{۱- گزینه ۴}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} x + \frac{1}{x} + 2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 7 \quad \text{۲- گزینه ۴}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 49 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$$

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}\right)^{\frac{1}{2}} = 2+\sqrt{3} \quad \text{۳- گزینه ۱}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \Rightarrow 10^3 = 370 + 3xy(10) \Rightarrow xy = 21 \quad \text{۴- گزینه ۳}$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 10^2 - 2(21) = 58$$

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \lambda^a \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{2^{\frac{1}{2}}}} = (2^{\frac{1}{2}})^a \Rightarrow \sqrt{2^{\frac{2}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}a} \Rightarrow (2^{\frac{2}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}a} \quad \text{۵- گزینه ۱}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$b < 0 \Rightarrow |b| = -b \quad \text{۶- گزینه ۳}$$

$$|a| < |b| \Rightarrow |a| < -b \Rightarrow b < a < -b$$

$$x+y=4 \Rightarrow y=4-x \quad \text{۷- گزینه ۲}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x^2 - 4x + 8) = 2((x-2)^2 + 4)$$

واضح است که کم‌ترین مقدار این عبارت به ازای  $x = 2$  اتفاق می‌افتد که  $2(0/4) = 8$  است؛ پس:  $x^2 + y^2 \geq 8$

$$a(\sqrt{b} - 3) = \frac{\sqrt{3} - 3}{3} \Rightarrow a(\sqrt{b} - 3) = \sqrt{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow a\sqrt{b} - 3a = \sqrt{\frac{1}{3}} - 1 \quad \text{۸- گزینه‌ی ۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ a\sqrt{b} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{b} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

۹- گزینه‌ی ۴ بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیش‌تر از  $-\sqrt{10}$  عدد  $-4$  است.

۱۰- گزینه‌ی ۴

(۱) درست.  $y = 0$

(۲) درست.  $y = 0$

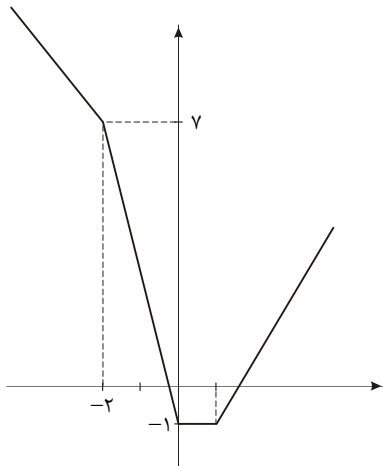
(۳) درست.  $y = 3 - x$

(۴) نادرست. عددی مانند  $y$  که حاصل جمع آن با هر  $x$  برابر ۳ شود، وجود ندارد.

۱۱- گزینه‌ی ۳

(۱) نادرست. مثلاً  $(1, 2)$  (۲) نادرست، مثلاً  $(1, 2)$  (۳) درست. (۴) نادرست. مثلاً  $(2, \infty)$

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow -1 < x+1 < 5 \quad \text{۱۲- گزینه‌ی ۲}$$



۱۳- گزینه‌ی ۲

خط  $y = -1$  نمودار این تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

۱۴- گزینه‌ی ۱ هر عدد صحیح  $x$  که در این نامساوی صدق کند،  $-x$  نیز صدق می‌کند. زیرا:

$$f(x) = |x+2| + |x-2|$$

$$f(-x) = |-x+2| + |-x-2| = |x-2| + |x+2| = f(x)$$

پس حاصل جمع آن‌ها صفر است.

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 3 \quad \text{۱۵- گزینه‌ی ۱}$$

$$x-1 < -2 \text{ یا } x-1 > 2 \Rightarrow |x-1| > 2$$

$$10 = \frac{(a-1) + (5a+3)}{2} \Rightarrow a=3 \Rightarrow (2, 18) \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{18-2}{2} = 8$$

۱۶- گزینه‌ی ۳

$$(2-2\epsilon, 2+2\epsilon) \subseteq (1-(3\epsilon-5), 1+(3\epsilon-5))$$

۱۷- گزینه‌ی ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3\epsilon+5 \leq 2-2\epsilon \Rightarrow \epsilon \geq 4 \\ 2+2\epsilon \leq 1+3\epsilon-5 \Rightarrow \epsilon \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \epsilon \geq 6$$

$$\left[ \frac{x+1}{2} \right] = \frac{x-3}{3}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴

$$\frac{x-1}{3} = k \Rightarrow x = 3k+1$$

$$\left[ \frac{3k+1+1}{2} \right] = k, k \leq \frac{3k+2}{2} < k+1 \Rightarrow -2 \leq k < 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1 \Rightarrow x = -5, -2$$

$$[1 \times 1] = |1 + [x]|$$

۱۹- گزینه‌ی ۲

الف) غیرممکن  $[x] = 1 + [x] \Rightarrow x \geq 0$

ب)  $x < 0 \Rightarrow [-x] = |1 + [x]|$

وقتی  $x > 0$  است،  $x \leq -1$  و بنابراین  $1 + [x] \leq 0$  است پس:

$$[-x] = -(1 + [x]) \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

پس جواب  $\mathbb{Z} - \{0, -\infty\}$  است.

$$[x] = 0 \Rightarrow [y] = 0, \pm 1, \pm 2$$

حالت ۵

۲۰- گزینه‌ی ۳

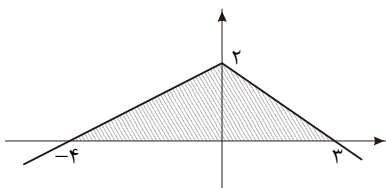
$$[x] = \pm 1 \Rightarrow [y] = 0, \pm 1, \pm 2$$

حالت  $5 \times 2 = 10$

$$[x] = \pm 2 \Rightarrow [y] = 0, \pm 1$$

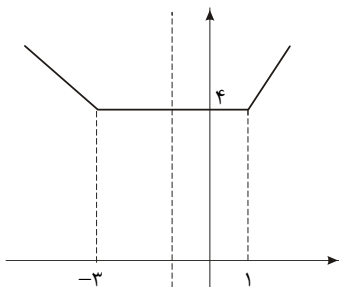
حالت  $3 \times 2 = 6$

پس ۲ دستگاه به صورت  $\begin{cases} [x] = k \\ [y] = k' \end{cases}$  به دست می‌آید. که هر کدام به صورت  $\begin{cases} k \leq x < k+1 \\ k' \leq y < k'+1 \end{cases}$  یعنی مربعی به مساحت ۱ است.



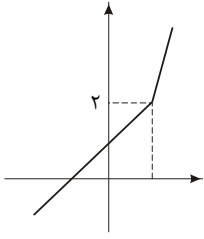
$$S = \frac{2 \times 8}{2} = 8$$

۲۱- گزینه‌ی ۳



$x = -1$  محور تقارن

۲۲- گزینه‌ی ۳



۲۳- گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} x = 3n + 1 \\ y = 3m + 1 \end{cases} \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3(n + m) + 2 \notin A \\ x - y = 3(n - m) \notin A \\ \frac{x}{y} \notin A \\ xy = 3(3nm + n + m) + 1 \in A \end{cases}$$

۲۴- گزینه‌ی ۳

$\frac{b}{4}$  بسط مختوم دارد پس باید  $a = 9$  باشد.

۲۵- گزینه‌ی ۲

$$\circ/\sqrt{4a} = \circ/\sqrt{4a} = \circ/\sqrt{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = 3$$