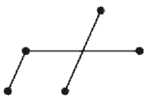
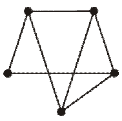
فصل اول

گراف

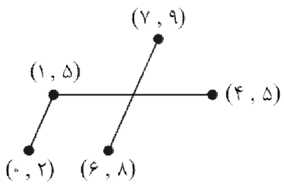
پرسش: اولاً: با معرفی ۵ بازه مناسب نشان‌دهید گراف مقابل یک گراف بازه‌ای است.



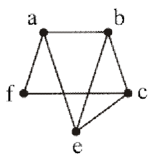
ثانیاً: آیا گراف مقابل می‌تواند یک گراف بازه‌ای از مرتبه ۵ باشد؟ چرا؟



پاسخ: اولاً: به ۵ راس مطابق شکل ۵ بازه نظیر می‌کنیم طوری‌که وقتی دو رأس مجاورند بازه‌های نظیر آن‌ها اشتراکشان غیرتهی است و اگر دو رأس مجاور نباشند بازه‌های نظیر آن‌ها اشتراک نداشته باشد. (معمولاً این بازه‌ها از ۲ طرف باز هستند.)

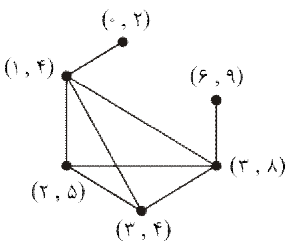


ثانیاً: اگر در یک گراف ساده چهارضلعی بدون قطر وجود داشته باشد نمی‌تواند گراف بازه‌ای باشد چهارضلعی abcf قطر ندارد پس گراف بازه‌ای نیست.



پرسش: اولاً گراف بازه‌ای نظیر بازه‌های (۹ , ۶)، (۸ , ۳)، (۴ , ۳)، (۵ , ۲)، (۴ , ۱) و (۲ , ۰) را رسم کنید. ثانیاً جمع مرتبه و اندازه‌ی این گراف چیست؟ ثالثاً دنباله‌ی درجه‌ی رئوس آن را بنویسید.

پاسخ: مطابق شکل ۶ نقطه به‌منزله ۶ رأس دورچیده بازه‌های نظیر آن‌ها را مشخص کرده اگر دو بازه اشتراک داشته‌باشند دو رأس نظیر آن‌ها مجاورند و اگر اشتراک نداشته‌باشند دو رأس نظیر آن‌ها مجاور نیستند.



ثانیاً: در این گراف ساده چون ۶ رأس دارد $p = ۶$ است و تعداد یال‌ها برابر q است (اندازه‌ی گراف) $q = ۸$ است.

ثالثاً: دنباله درجه رئوس باید درجه رئوس به‌ترتیب از کم به زیاد بنویسیم: S:۴ , ۴ , ۳ , ۳ , ۱ , ۱

پرسش: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعه‌ی رئوس یک گراف مرتبه‌ی ۵ باشد، این گراف به چند شکل رسم می‌شود، طوری‌که:

الف) دارای ۴ یال باشد.

ب) دارای ۴ یال باشد، طوری‌که در آن a با b و c مجاور باشد، ولی a با d مجاور نباشد.

پاسخ: الف) با ۵ نقطه $V=\{a,b,c,d,e\}$ تعداد $\binom{5}{2}=10$ پاره‌خط می‌توان رسم کرد اگر قرار باشد گراف ۴ یالی رسم کنیم باید ۴ پاره‌خط از این ۱۰ پاره‌خط را اختیار کنیم. $\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=210$

ب) اگر قرار باشد a با b و c مجاور باشد ۲ یال از ۴ یال مشخص است و چون a با d مجاور نیست پس ad جزء یال‌ها نیست بنابراین جـواب «ب» عبارتست از:۴ $\binom{2}{2}\times\binom{7}{2}=1\times 21=21$

پرسش: ثابت کنید تعداد رئوس درجه فرد هر گراف زوج است.

پاسخ: با توجه به این‌که هر یال دو سر دارد پس هر یال در تعداد یال‌ها یک بار و در درجه رئوس ۲ بار به‌حساب می‌آید بنابراین: $\sum \deg V_i=2q$

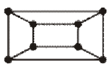
چنان‌چه (جمع درجه‌ی رئوس درجه زوج گراف $=A$) و (جمع درجه‌ی رئوس درجه‌ی فرد گراف $=B$) باشد. $A+B=2q$ چون A و $2q$ زوجند؛ پـس B زوج است، بنابراین تعداد رئوس درجه فرد گراف زوج است.

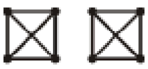
پرسش: گراف G، ۳- منتظم مرتبه‌ی p با اندازه‌ی q است که در آن $q=p+4$، گراف را به دو شکل رسم کنید.

پاسخ: با توجه به این‌که در هر گراف $\sum \deg V_i=2q$ و با درنظر گرفتن این‌که اگر درجه همه رئوس r باشد جمع درجه رئوس rp می‌شود پس:

$$\begin{cases}3p=2q\\ q=p+4\end{cases}\Rightarrow 3p=2(p+4)\Rightarrow p=8\Rightarrow q=12$$

نمودار آن به‌صورت (همبند) یا (ناهمبند) رسم می‌شود.


همبند


ناهمبند

پرسش: اولاً اگر G یک گراف r- منتظم مرتبه ۱۳ باشد، r چند مقدار می‌پذیرد. ثانیاً با فرض این‌که $r=2$ باشد آیا این گراف بازه‌ای است؟ چرا؟

پاسخ: $\sum \deg V_i=2q \Rightarrow 13r \Rightarrow 2q \Rightarrow$ زوج است $r \Rightarrow r\in\{0,2,4,6,8,10,12\}$

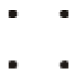
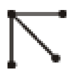
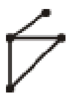
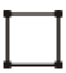
ثانیاً گراف ۲ منتظم مرتبه ۱۳ را می‌توان به‌صورت یک ۱۳ ضلعی یا ۳ ضلعی و ۱۰ ضلعی یا ۴ ضلعی و ۹ ضلعی یا ۵ ضلعی و ۸ ضلعی یا ۶ ضلعی و ۷ ضلعی یا ۳ , ۳ , ۳ , ۴ ضلعی یا ... رسم کرد که هیچ‌کدام بازه‌ای نیست.

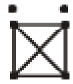
(مهم) گراف ۲- منتظم زمانی بازه‌ای است که p (مرتبه‌ی گراف) مضرب ۳ باشد تا به‌صورت مثلث، مثلث آن را رسم کنیم.

پرسش: ضرب درجه‌ی رئوس یک گراف مرتبه ۴ به‌کدام صورت‌های زیر نمی‌تواند باشد؟ چرا؟

۱) صفر	۲) ۳	۳) ۱۲	۴) ۱۶
۵) ۲۷	۶) ۸۱	۷) ۳۶	۸) ۱۸

پاسخ: در گراف مرتبه‌ی ۴ هر ۴ رأس گراف از درجه‌ی کم‌تر از ۴ است، پس ضرب درجه‌ی رئوس:

صفر می‌تواندباشد. 
سه می‌تواندباشد. 
۱۲ می‌تواندباشد. 
۱۶ می‌تواندباشد. 

۸۱ می‌تواندباشد. 
ولی ۲۷ و ۱۸ نمی‌تواند باشد $18=\underbrace{3\times3\times2\times1}_{\text{تعداد رئوس درجه فرد، فرد است}}$

$27=3\times3\times3\times1 \xrightarrow[3,3,3,1]{\text{بنابه قانون حکیمی}} 2,2,0 \xrightarrow{\text{بنابه قانون حکیمی}} 1$ و -1 قابل‌رسم نیست.

پرسش: G یک گراف ۴- منتظم مرتبه p است که با افزودن ۳ یال به آن به گراف کامل $k_۶$ تبدیل می‌شود. p را مشخص کنید.

پاسخ: تعداد یال گراف ۴ منتظم مرتبه p برابر است با:

$$q=\frac{\sum \deg V_i}{۲}=\frac{۴p}{۲}$$

و تعداد یال گراف کامل k_p برابر است با $\frac{p(p-۱)}{۲}=\binom{p}{۲}$ بنابراین:

$$q+۳=\binom{۶}{۲} \Rightarrow \frac{۴p}{۲}+۱=۱۵ \Rightarrow ۲p+۳=۱۵ \Rightarrow p=۶$$

پرسش: اولاً چند نوع گراف ۲- منتظم از مرتبه ۱۰ داریم؟ ثانیاً چند نوع گراف ۶- منتظم مرتبه ۹ داریم؟

پاسخ: وقتی صحبت از چند نوع گراف می‌شود فرض بر این بگذارید که رئوس نام‌گذاری‌نشده پس گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۰ به‌صورت‌های (۱۰ ضلعی) یا (۳ و ۷ ضلعی) یا (۴ و ۶ ضلعی) یا (۵ و ۵ ضلعی) یا (۳ و ۳ و ۴ ضلعی) رسم می‌شود.

ثانیاً: مکمل گراف ۶- منتظم مرتبه ۹ گراف ۲- منتظم مرتبه ۹است حال گراف ۲ منتظم مرتبه ۹ را باید دید به چند طریق می‌توان رسم کرد (۹ ضلعی) یا (۳ و ۶ ضلعی) یا (۴و ۵ ضلعی) یا (۳ و ۳و ۳ ضلعی) می‌توان رسم کرد.

پرسش: ۱- گراف ۳- منتظم مرتبه p قابل‌رسم نیست در مورد p چه اظهارنظری می‌توان کرد؟ چرا؟

۲- گراف ۳- منتظم که کامل باشد چند یال دارد؟

پاسخ: ۱- اگر p فرد باشد چون درجه رئوس ۳ است تعداد رئوس درجه فرد، فرد می‌شود گراف قابل‌رسم نیست پس برای این‌که قابل‌رسم باشد باید P زوج باشد.

۲- اگر گراف ۳- منتظم بخواهد کامل باشد باید ۴رأس داشته‌باشد که دراین‌صورت: $q=\binom{۴}{۲}=۶$.

پرسش: در گرافی $\delta=۳$ و $P=۱۷$ و $\Delta=۷$ است این گراف حداقل و حداکثر چند یال دارد؟

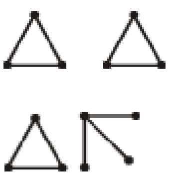
پاسخ: چنان‌چه می‌دانیم $\sum \deg V_i=۲q$ است پس برای این‌که q مـی‌نـیمم شـود سـعی مـی‌کـنیم درجـه رئـوس را کـم کـنیم همـه را حـداقل بگیـریم ۳ , ۳ , ۳ , $\cdots$, ۴ , ۷ دراین‌صورت با توجه به این‌که تعداد رئوس ۱۷ تاست (فرد است) پس یکی از رئوس باید زوج باشد، آن هم زوج کم‌تـرین در بـازه (۳ , ۷) پس $q_{min}=\frac{۷+۴+۱۵\times۳}{۲}=۲۸$ و برای این‌که q زیاد شود سـعی مـی‌کـنیم درجـه رئـوس را بـزرگ کـنیم $(\Delta=۷)$ پـس درجـه رئـوس ۳ , ۶ , ۷ , $\cdots$, ۷ , ۷ اختیار می‌کنیم $q_{max}=\frac{۱۵\times۷+۶+۳}{۲}=۵۷$ است.

پرسش: گراف اویلری و همیلتنی را تعریف کنید. کدام گراف زیر هم اویلری و هم همیلتنی است؟ چرا؟

الف) ۲- منتظم مرتبه ۶ **ب)** ۳- منتظم مرتبه ۶ **ج)** گرافی با درجه رئوس ۱ , ۱ , ۱ , ۲ , ۲ , ۲ , ۳

پاسخ: گراف اویلری: گرافی همبند که با شروع از یک رأس و پیمودن همه یال‌ها فقط یک‌بار به همان نقطه شروع باز گردد یا گراف همبندی کـه درجـه همـه رئوس آن زوج است.

گراف همیلتنی: گراف همبندی که از مرتبه $(p\geq۳)$ بوده و حداقل یک دور به طول p داشته‌باشد یا دوری در آن یافت شود که از همه رئوس فقط یک‌بـار بگذرد.



الف) گراف ۲- منتظم مرتبه ۶ چون می‌تواند ناهمبند رسم شود، پس نه اویلری است نه همیلتنی.

ب) ۳- منتظم مرتبه ۶ حتماً همیلتنی است امّا اویلری نیست.

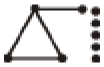
ج) گرافی با درجه رئوس داده‌شده $(p=۷)$ و $q=\frac{\sum \deg V_i}{۲}=۶$ نه اویلری است نه همیلتنی

پرسش: اولاً در گراف G، از مرتبه‌ی ۹ دنباله‌ی درجه‌ی رئوس « x , ۶ ,۶ , ۷ , ۸ , ۸ , ۸ , ۸ , ۸ » است، مقدار x چیست؟

ثانیاً دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گراف مکمل G، $(\bar{G})$ را بنویسید و گراف $\bar{G}$ را رسم کنید.

پاسخ: از ۹ رأس گراف G مقدار ۵ رأس درجه فول ۸ است پس $x \ge ۵$ است از طرفی $x \le ۶$ است با توجه به این‌که تعداد رئوس درجه فرد باید زوج باشد پس $x = ۵$ قابل‌قبول است.

ثانیاً با توجه به این‌که $(\deg_G V_i + \deg_{\bar G} V_i = p-۱)$ یعنی جمع درجه هر رأس گراف G با درجه‌ی رأس نظیر آن از $\bar G$ روی هم $p-۱$ می‌شود پس دنباله درجه رئوس $\bar G$ «۳ , ۲ , ۲ , ۱ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰» است و نمودار آن به شکل مقابل است.



پرسش: در یک گراف G از مرتبه‌ی ۷ تعداد رئوس درجه‌ی زوج ۳ تاست در مکمل G، $(\bar G)$ چند رأس درجه زوج دارد؟

پاسخ: وقتی در گراف مرتبه ۷ تعداد رئوس درجه زوج ۳ تاست تعداد رئوس درجه فرد ۴ تاست از طرفی جمع درجه هر رأس گراف با درجه همان رأس از گراف مکمل باید ۶ شود پس اگر رأسی در G فرد باشد در مکملش فرد است و اگر رأسی زوج باشد در مکملش زوج است، بنابراین $\bar G$ نیز ۳ رأس درجه زوج دارد.

پرسش: تعداد یال یک گراف کامل مرتبه‌ی p، ۳۶ تا کم‌تر از تعداد یال یک گراف ۹− منتظم مرتبه‌ی ۱۰ است. p چیست؟

پاسخ:

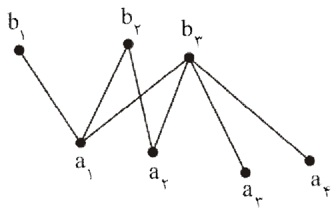
$$\text{تعداد یال گراف ۹ − منتظم مرتبه‌ی ۱۰} = k_{۱۰} \text{ تعداد یال گراف کامل} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$

$$۴۵ - ۳۶ = ۱۰ \Rightarrow \binom{p}{۲} = ۱۰ \Rightarrow p = ۵$$

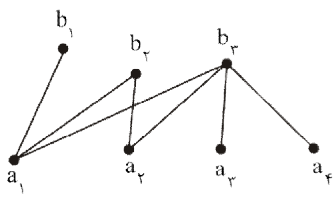
پرسش: افراد $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ جهت مشاغل $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ مطابق نمودار زیر اعلام آمادگی کرده‌اند.

به چند طریق می‌توان افراد را استخدام کرد؟ کدام افراد حتماً استخدام می‌شوند؟

این گراف چند دور با طول ۳ دارد، چند دور با طول ۴ دارد؟



پاسخ: در مورد گراف مشاغل مطابق شکل ابتدا برای شغل‌هایی که متقاضی کم‌تری دارد فرد یا افراد متقاضی را درنظر می‌گیریم در این‌جا شغل $b_۱$ را به شخص $a_۱$ می‌دهیم سپس شغل $b_۲$ را به شخص $a_۲$ می‌دهیم و دست آخر شغل $b_۳$ به $a_۳$ یا $a_۴$ می‌دهیم بنابراین به دو طریق می‌توان شغل‌ها را تقسیم کرد. در این گراف‌ها دور با طول فرد ۳ یا ۵ و ... نداریم. این گراف یک دور به طول ۴ دارد. $a_۱b_۲a_۲b_۳a_۱$



پرسش: یک گراف از مرتبه $p = ۸$ و اندازه $q = ۱۱$ مفروض است. طوری‌که درجه رئوس آن فقط ۲ یا ۳ است. چند رأس گراف درجه ۲ است؟ چند رأس این گراف ایزوله (منفرد) است؟

پاسخ: فرض کنیم x رأس گراف درجه ۲ باشد و $۸-x$ رأس درجه ۳ باشد با توجه به این‌که:

$$\sum \deg V_i = ۲q \Rightarrow x \times ۲ + (۸-x) \times ۳ = ۲ \times ۱۱ \Rightarrow x = ۲$$

بنابراین ۲ رأس درجه ۲ و ۶ رأس درجه ۳ است دنباله درجه رئوس ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۲ , ۲ است پس این گراف رأس ایزوله یا منفرد ندارد. چون درجه رئوس قرار است فقط ۲ یا ۳ باشد.

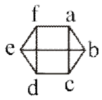
پرسش: گراف ۳− منتظم مرتبه p مفروض است چنان‌چه بین مرتبه و اندازه‌ی گراف (q) رابطه $q = p+۳$ برقرار باشد با نام‌گذاری رئوس آن برای هر مورد زیر گرافی چنان رسم کنید که:

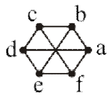
الف) دور با طول ۳ و ۵ داشته‌باشد.

ب) دور با طول ۳ یا ۵ نداشته‌باشد.

پاسخ:

$$\sum \deg V_i = ۲q \Rightarrow \frac{۳p}{۲} = q \xrightarrow{q=p+۳} \frac{۳p}{۲} = p+۳ \Rightarrow p = ۶$$

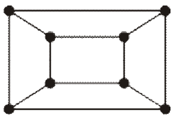
مورد الف) گراف را به‌صورت مقابل رسم کنید که هم دور به طول ۳ دارد abca هم دور با طول ۵ دارد abcdfa 

مورد ب) گراف را به‌صورت مقابل رسم کنید که دور با طول ۳ یا ۵ ندارد. 

پرسش: الف) گراف همبند و ۳− منتظم با ۸ رأس و ۱۲ یال رسم کنید. چند یال به آن اضافه کنیم تا به گراف $k_۸$ تبدیل شود؟

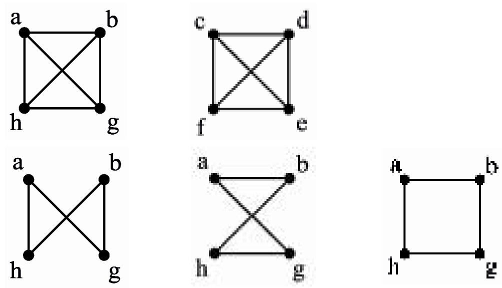
ب) گراف ناهمبند و ۳− منتظم با ۸ رأس و ۱۲ یال را رسم کنید. این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟

پاسخ: گراف همبند ۳− منتظم مرتبه‌ی ۸ دارای ۱۲ یال است.



تعداد یال مورد نیاز برای کامل‌شدن از مرتبه ۸ $= \binom{۸}{۲} - ۱۲ = ۱۶$

گراف ناهمبند ۳− منتظم مرتبه‌ی ۸ دارای ۱۲ یال به‌صورت ۲ گراف $k_۴$ رسم می‌شود.



هر کدام از آن‌ها $۳ = \frac{(۴-۱)!}{۲} \times \binom{۴}{۴}$ دور با طول ۴ دارد، پس کلاً ۶ دور دارد.

پرسش: G یک گراف همبند از مرتبه p است.

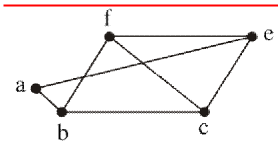
الف) حداقل اندازه گراف G چیست؟

ب) حداکثر اندازه گراف G چیست؟

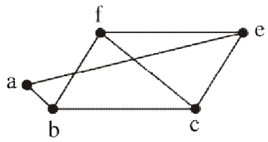
پاسخ: الف) ساده‌ترین گراف همبند درخت است یعنی گراف مرتبه p با حداقل یال که همبند باشد $q = p - ۱$ یال دارد.

ب) حداکثر اندازه گراف $\frac{p(p-۱)}{۲} = \binom{p}{۲}$ است. (گراف کامل k_p باشد)

پرسش: در گراف مقابل همه مسیرها از a به e را نام ببرید. طول کوتاه‌ترین مسیر بین b و e چند است؟ (d(e , b)) چیست؟



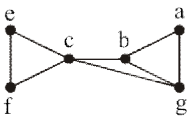
پاسخ: مسیرهای از a به e در شکل مقابل عبارتند از:



- ae مسیر با طول یک
- abce مسیر با طول ۳
- abfe مسیر با طول ۳
- abcfe مسیر با طول ۴
- abfce مسیر با طول ۴

و $d(e , b) = ۲$

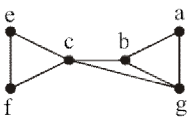
پرسش: در یک گراف مطابق شکل:



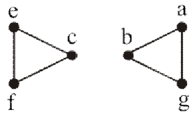
الف) چند دور وجوددارد، آن‌ها را نام ببرید.

ب) حداقل چه تعداد یال را حذف کنیم تا به گراف ۲− منتظم مرتبه ۶ تبدیل شود؟

ج) چه تعداد یال را حذف کنیم تا به گراف همبند بدون دور تبدیل شود؟



پاسخ: الف) در گراف مقابل چهار دور وجوددارد. efce، bagb، cbgc و cgabc.



ب) چنانچه ۲ یال cb و cg را حذف کنیم به گراف ۲– منتظم مرتبه ۶ تبدیل می‌شود.

ج) برای این‌که به گراف همبند بدون دور (درخت) تبدیل شود کافی است مثلاً یال‌های fc و cg و bg را حذف کنیم (یعنی ۳ یال حذف کنیم.)

پرسش: فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه p و اندازه $q=۱۲$ باشد. اگر G یک گراف r– منتظم بوده و داشته‌باشیم $۲r-p=۲$ مقادیر p و r را به‌دست آورید.

پاسخ:

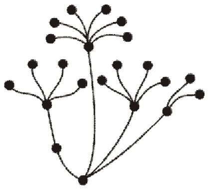
$$\sum \deg V_i = ۲q \Rightarrow rp = ۲q = ۲۴ \xrightarrow{۲r-p=۲} ۲r - \frac{۲۴}{r} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲r^۲ - ۲r - ۲۴ = ۰ \Rightarrow r^۲ - r - ۱۲ = ۰ \Rightarrow r = ۴ \xrightarrow{۲r-p=۲} p = ۶$$

پرسش: دنباله درجه رئوس یک گراف درخت به‌صورت $S: ۷ , ۵ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , \cdots , ۱$ است مرتبه و اندازه این درخت چیست؟ آن را رسم کنید.

پاسخ:

$$\sum \deg V_i = ۲q \Rightarrow ۷+۵+۵+۴+۳+۲+(p-۶)\times ۱ = ۲(p-۱) \Rightarrow ۲۲ = p \Rightarrow q = ۲۱$$



پرسش: الف) گراف درخت را تعریف کنید.

ب) ثابت کنید در گراف درخت بین هر دو رأس متمایز دقیقاً یک مسیر وجوددارد.

پاسخ: الف) گراف همبند فاقد دور را درخت گویند.

ب) اگر G گراف درخت باشد بنا به تعریف همبند است پس بین هر دو رأس متمایز آن حداقل یک مسیر وجوددارد. چنانچه بین دو رأس متمایز بیش‌تر از یک مسیر وجود داشته‌باشد دور پدید می‌آید که تناقض با فرض درخت بودن گراف دارد. پس بین هر دو رأس متمایز گراف درخت دقیقاً یک مسیر وجوددارد.

پرسش: G یک گراف همبند مرتبه p است که با افزودن ۱۵ یال به آن به گراف کامل k_p تبدیل می‌شود و با حذف ۲۱ یال به گراف درخت مرتبه p تبدیل می‌شود p را مشخص کنید.

پاسخ: فرض کنیم اندازه گراف G برابر q باشد پس:

$$\begin{cases} q+۱۵ = k_p \text{ تعداد یال } = \binom{p}{۲} \\ q-۲۱ = \text{ تعداد یال درخت } = p-۱ \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} q+۱۵ = \frac{p(p-۱)}{۲} \\ q-۲۱ = p-۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{از تفاضل دو رابطه}} ۱۵+۲۱ = \frac{p(p-۱)}{۲} - (p-۱)$$

$$\Rightarrow ۷۲ = p(p-۱) - ۲(p-۱) \Rightarrow ۷۲ = (p-۱)(p-۲) \Rightarrow p = ۱۰$$

پرسش: ثابت کنید در گراف درخت مرتبه‌ی p با اندازه‌ی q، همواره $q=p-۱$ است.

پاسخ: اثبات: (با استقرا بر p مطرح می‌کنیم)

اگر $p=۱$ باشد بدیهی است در درخت مرتبه‌ی ۱ که فقط یک نقطه است $(q=p-۱)$ فرض کنیم G یک درخت مرتبه k با اندازه $k-۱$ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم اگر G' یک درخت مرتبه‌ی $k+۱$ باشد اندازه‌اش k است، می‌دانیم هر درخت مرتبه‌ی $k+۱$ مانند G' است که حـداقل دو رأس درجه یک دارد. یک رأس درجه یک و یال مرور کرده بر آن را حذف کنیم درخت مرتبه k به‌دست می‌آید که $k-۱$ یال دارد پس G' دارای $k+۱$ رأس و k یال است.

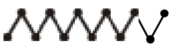
پرسش: ۵ درخت روی هم دارای ۳۹ یال هستند. جمع مرتبه این ۵ درخت چیست؟

پاسخ: فرض کنیم مرتبه این ۵ درخت $p_۱, p_۲, p_۳, p_۴, p_۵$ باشد پس اندازه این ۵ درخت $p_۱-۱$ و $p_۲-۱$ و $p_۳-۱$ و $p_۴-۱$ و $p_۵-۱$ است بنابراین:

$$p_۱-۱+p_۲-۱+p_۳-۱+p_۴-۱+p_۵-۱=۳۹ \Rightarrow p_۱+p_۲+p_۳+p_۴+p_۵=۴۴$$

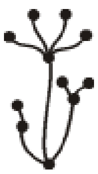
پرسش: در گراف درختی تعداد رئوس درجه ماکزیمم ۵ برابر تعداد رئوس درجه می‌نیمم است. جمع مرتبه و اندازه این گراف چیست؟

پاسخ: در گراف درخت مرتبه که $p \geq ۲$ است دست کم ۲ رأس گراف درجه یک است وقتی تعداد رئوس درجه ماکزیمم ۵ برابر تعداد رئوس درجه می‌نیمم است گراف به‌صورت یک زنجیر است که فقط دو رأس درجه یک دارد و $۱۰=۲\times۵$ رأس درجه ۲ دارد بنابراین مرتبه گراف $p=۱۲=۱۰+۲$ و اندازه گراف $q=۱۱$ است پس $p+q=۲۳$.



پرسش: فرض کنید G یک درخت است که یک رأس درجه ۵ و دو رأس درجه ۳ و یک رأس درجه ۲ و x رأس درجه یک دارد x را بیابید و درخت را رسم کنید.

پاسخ:



$$\sum \deg V_i=۲q \Rightarrow ۵+۳+۳+۲+x\times۱=۲(۴+x-۱) \Rightarrow ۱۳+x=۶+۲x \Rightarrow \boxed{۷=x}$$

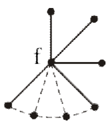
نمودار درخت به شکل روبه‌رو است.

پرسش: در درخت T با p رأس که ماکزیمم درجه رئوسش $\Delta=k$ است ثابت کنید حداقل k رأس درجه یک دارد.

پاسخ: اگر در گراف درختی $\Delta=k$ باشد در این رأس یک یال را در نظر گرفته و دنبال می‌کنیم حتماً حداقل به یک رأس درجه یک منتهی می‌شود و در این رأس k یال وجوددارد k یال این رأس را دنبال کنیم هر کدام حداقل به یک رأس درجه یک منتهی می‌شوند پس اگر گراف درخت $\Delta=k$ باشد حداقل k رأس درجه یک دارد.

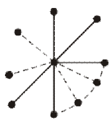
پرسش: چنان‌چه ضرب درجه رئوس یک گراف همبند فاقد دوری ۱۰۰ باشد این گراف حداقل چند رأس درجه یک و حداکثر چند رأس درجه یک دارد؟

پاسخ: وقتی ضرب درجه رئوس یک گراف درخت f باشد چنان‌چه $f=f\times۱\times۱\times\cdots\times۱$ بنویسیم تعداد رئوس درجه یک حداکثر است و دراین‌صورت f رأس درجه یک دارد.



چنان‌چه f را تا حد ممکن به اعداد اول تجزیه کنیم تعداد رئوس درجه یک می‌نیمم است که باید حساب کرد.

$$۱۰۰=۱۰۰\times۱\times۱\times\cdots\times۱ \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ و حداکثر ۱۰۰ رأس درجه یک دارد $(p=۱۰۱)$

$$۱۰۰=۵\times۵\times۲\times۲\times۱\times\cdots\times۱ \Rightarrow \sum \deg V_i=۲q \Rightarrow ۵+۵+۲+۲+(p-۴)\times۱=۲(p-۱) \Rightarrow p=۱۲$$

تعداد رئوس درجه یک $p-۴=۸$ است.

پرسش: دنباله درجه رئوس یک گراف مرتبه ۱۰ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهد، چنان‌چه $\delta=۴$ باشد:

الف) چند یال از این گراف را حذف کنیم تا به گراف درخت مرتبه ۱۰ تبدیل شود.

ب) چند یال به این گراف بیفزاییم تا به گراف کامل $k_{۱۰}$ تبدیل شود.

پاسخ:

هرگاه گفته شود درجه‌ی رئوس گرافی تشکیل تصاعد حسابی یا هندسی می‌دهد گراف باید منتظم باشد $(\delta = \Delta)$.

در این مسأله ۱۰ رأس همه درجه ۴ هستند پس $(q = 20)$ است $(\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow 40 = 2q \Rightarrow q = 20)$.

برای این‌که این گراف به گراف درخت مرتبه ۱۰ تبدیل شود باید $(20 - x = 9 \Rightarrow x = 11)$ یال حذف کنیم. برای این‌که این گراف به گراف کامل k_{10} تبدیل شود باید $\left(\binom{10}{2} - 20 = 25\right)$ یال به آن اضافه کنیم.

پرسش: در گراف کامل k_8 با رئوس $V = \{a, b, c, \cdots, h\}$:

الف) چند مسیر با طول ۴ از a به b وجوددارد که از c بگذرد ولی از d نگذرد؟

ب) چند دور با طول ۴ وجوددارد؟

ج) چند دور با طول ۴ وجوددارد که از a بگذرد و از d نگذرد؟

پاسخ: الف) برای این‌که طول مسیر ۴ باشد و از a به b باشد باید بین a و b، ۳ حرف از رئوس دیگر گراف قرار گیرند با توجه به این‌که قرار است از c بگذرد و از d نگذرد باید یکی از رئوس c باشد و ۲ رأس دیگر باید از $\{e, f, g, h\}$ باشند.

$$a\boxed{c\ \_\ \_}b \Rightarrow \text{تعداد مسیر مورد نظر} = \binom{4}{2} \times 3! = 36$$

ب) برای تعداد دور با طول ۴ باید ۴ رأس از ۸ رأس را انتخاب کنیم سپس جایگشت‌های آن ۴ نقطه را مدنظر داشت.

$$\binom{8}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 210$$

ج) برای این‌که دور از a بگذرد و از d نگذرد باید ۳ رأس از $\{b, c, e, f, g, h\}$ انتخاب کرد با رأس a روی هم ۴ رأس شده حال از این ۴ رأس دور با طول ۴ می‌گذرد.

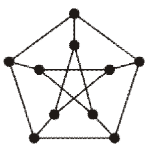
$$\binom{6}{3} \times \frac{(4-1)!}{2} = 20 \times 3 = 60$$

پرسش: الف) گراف پترسن را رسم کنید.

ب) در گراف پترسن دور با طول L وجود ندارد L چه مقادیری می‌تواند قبول کند.

ج) آیا گراف پترسن اویلری، همیلتنی است؟ چرا؟

پاسخ: به گراف ۳– منتظم مرتبه ۱۰ شکل زیر گراف پترسن گویند این گراف دورهای با طول ۳ , ۴ , ۷ , ۱۰ ندارد و دور با طول‌های ۵ , ۶ , ۸ , ۹ دارد پس:



$L \in \{10, 7, 4, 3\}$

گراف پترسن اویلری نیست چون درجه رئوس آن زوج نیست. همیلتنی نیست چون دور با طول $(p = 10)$ ندارد.

پرسش: M ماتریس مجاورت گراف G است.

الف) ۴ ویژگی M را بنویسید.

ب) چنان‌چه M ماتریس مجاورت گراف درخت T باشد که ۲۶ صفر داشته‌باشد، گراف T چند یال دارد؟

پاسخ: الف) ۱) تعداد یک موجود در $M = \sum \deg V_i = 2q$ ۲) تعداد صفر موجود در $M = (p^2 - 2q)$

۳) عناصر قطر اصلی M همگی صفرند. ۴) M متقارن است.

ب) $\text{تعداد صفر} = p^2 - 2q \Rightarrow 26 = p^2 - 2(p-1) \Rightarrow p^2 - 2p - 24 = 0$

پس $p = 6$ است که $q = p - 1 = 5$ است.

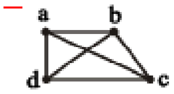
پرسش: M ماتریس مجاورت گراف درخت T است اگر ضرب عناصر قطر اصلی $M^۲$ برابر ۸۰ باشد این درخت حداقل چند رأس درجه یک و حداکثر چند رأس درجه یک دارد؟

پاسخ: عناصر قطر اصلی $M^۲$ همان درجه رئوس گرافند پس ضرب درجه رئوس گراف ۸۰ است.

$۸۰ = ۸۰\times۱\times۱\times۱\times\cdots\times۱ \;\Rightarrow\;$ (حداکثر تعداد رئوس درجه یک $= ۸۰$) و $(p = ۸۱)$

$$۸۰ = ۵\times۲\times۲\times۲\times۲\times۱\times\cdots\times۱ \;\Rightarrow\; \sum \deg V_i = ۲q \;\Rightarrow\; ۵+۲+۲+۲+۲+(p-۵)\times۱ = ۲(p-۱) \;\Rightarrow\; \boxed{p=۱۰}$$

بنابراین حداقل تعداد رئوس درجه یک برابر است با $(p-۵=۵)$ است.



پرسش: الف) ماتریس مجاورت گراف مقابل را M می‌نامیم M را تشکیل دهید و $M^۲$ را حساب کنید.

ب) چنان‌چه M ماتریس مجاورت گراف کامل k_p باشد و عضو نظیر سطر سوم ستون چهارم $M^۲$ برابر ۷ باشد مقدار p چیست؟

پاسخ: الف)

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M^۲ = MM = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب) اگر M ماتریس مجاورت گراف k_p باشد عناصر روی قطر اصلی $M^۲$ همگی $(p-۱)$ هستند و عناصر خارج قطر اصلی $M^۲$ همگی $(p-۲)$ هستند.

پس $(p-۲=۷ \;\Rightarrow\; p=۹)$ است.

پرسش: جای خالی کلمه‌ی مناسب یا عدد مناسب بنویسید.

الف) اگر با شروع از یک رأس گراف و پیمودن همه یال‌ها فقط یکبار به همان نقطه شروع بازگردیم گراف را ...... گویند.

ب) گرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال رسم شده‌باشد ...... گوییم.

ج) گرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته‌باشد ...... گوییم.

د) جمع تعداد یال k_p و $k_{p+۱}$ برابر است با ......

ه) تعداد یال گراف کامل مرتبه ۶ برابر است با ......

و) گراف همبندی که از مرتبه‌ی p باشد و دوری با طول p داشته‌باشد ...... گویند.

ز) گراف $k_۴$ دارای ...... دور با طول ۳ است.

ح) تعداد صفر ماتریس مجاورت گراف مرتبه p با اندازه q برابر است با ......

ط) k_p و $k_{p'}$ به‌ترتیب زمانی اویلری و همیلتنی هستند که p ...... و p' ...... باشد.

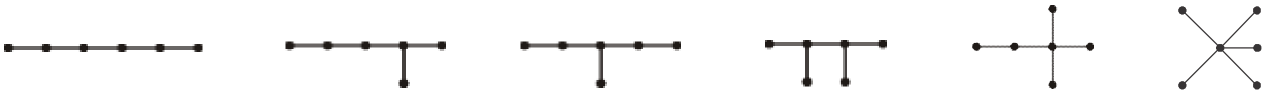
پاسخ: الف) اویلری   ب) کامل   ج) درخت   د) $\binom{p}{۲}+\binom{p+۱}{۲}=p^۲$

ه) $\binom{۶}{۲}=۱۵$ و) همیلتنی   ز) $\binom{۴}{۳}\times\frac{(۳-۱)!}{۲}=۴$ ح) تعداد صفر $= p^۲-۲q$

ط) k_p وقتی اویلری است که p فرد باشد. $k_{p'}$ وقتی همیلتنی است که $p' \geq ۳$ باشد.

پرسش: درخت‌های مرتبه ۶ را رسم کنید و در چه تعداد آن‌ها $\Delta = ۳$ است؟

پاسخ: درخت‌های مرتبه‌ی ۶ به ۶ صورت روبه‌رو رسم می‌شود که در ۳ مورد آن‌ها $\Delta = ۳$ است.



پرسش: M ماتریس مجاورت گراف درخت G است اگر $M^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & k \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & x & ۱ \\ ۱ & ۰ & n & ۱ \end{bmatrix}$ باشد:

الف) $x+p+q$ چیست؟ (p مرتبه و q اندازه گراف)

ب) $n+k+x$ چیست؟

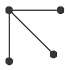
ج) درخت را رسم کنید.

پاسخ: با توجه به این‌که ماتریس ۴×۴ است پس $p = ۴$ است.

عناصر قطر اصلی $M^۲$ درجه رئوس گراف هستند پس: $\sum \deg V_i = ۲q \quad \Rightarrow ۱+۳+x+۱ = ۲(p-۱)$

$$۱+۳+x+۱ = ۲\times۳ \quad \Rightarrow \quad x = ۱ \quad \Rightarrow \quad p = ۴ \ , \ q = p-۱ = ۳ \ , \ x = ۱ \quad \Rightarrow \quad x+p+q = ۸$$

ب) $M^۲$ متقارن است پس $k = ۱$ و $n = ۱$ بنابراین: $x+k+n = ۳$

ج) چون عناصر قطر اصلی $M^۲$ درجه رئوس گرافند پس درجه رئوس «۱ , ۳ , ۱ , ۱» است که درخت آن  است.

پرسش: اگر عنصر سطر i ام ستون j ام ماتریس $M^۲$ تعداد مسیرهای با طول ۲ از V_i را به V_j را نمایش دهد و M ماتریس مجاورت گراف درخت T باشد عناصر خارج قطر اصلی $M^۲$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پاسخ: چون در گراف درخت از هر رأس به رأس دیگر دقیقاً یک مسیر وجوددارد یا طول این مسیر ۲ است یا ۲ نیست اگر طول این مسیر ۲ باشد که عناصر خارج قطر اصلی $M^۲$ یک است و اگر طول مسیر ۲ نباشد صفر است پس عناصر خارج قطر اصلی $M^۲$ یا یک است یا صفر به‌شرط آن‌که M ماتریس مجاورت گراف درخت باشد.