فصل سوم

مقاطع مخروطی

پرسش: اگر $A(2\,,3)$ و $B(1\,,0)$ دو نقطه در صفحه‌ای باشند، مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند M که مجموع مربعات فواصل آن‌ها از A و B برابر ۱۴ باشد چیست؟

پاسخ: فرض کنیم $M(x\,,y)$ نقطه‌ای از صفحه باشد که $MA^2+MB^2=14$؛ پس:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}\right)^2=14 \Rightarrow 2x^2+2y^2-6x-6y=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-3x-3y=0 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

معادله مکان فوق دایره‌ای است با مرکز $\left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

پرسش: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از $A(2\,,4)$ مساوی $\sqrt{2}$ برابر فاصله آن‌ها از $B(1\,,2)$ باشد به‌دست آورید.

پاسخ: اگر $M(x\,,y)$ یک نقطه مکان باشد که $MA=\sqrt{2}MB$ داریم:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

دو طرف را به توان ۲ رساندە می‌توان نوشت:

$$x^2-4x+4+y^2-8y+16=2[x^2+y^2-2x-4y+5]$$

یا $x^2+y^2=10$، یعنی مکان دایره‌ای است با مرکز $(0\,,0)$ و شعاع $R=\sqrt{10}$

پرسش: از نقطه A با طول ۴ واقع بر امتداد وتر مشترک دو دایره با معادلات $\begin{cases} C: x^2+y^2+x-2y=0 \\ C': x^2+y^2-2x+y=0 \end{cases}$ مماس‌هایی بر هر دو دایره رسم می‌کنیم. اندازه طول مماس را به‌دست آورید.

پاسخ: برای به‌دست آوردن وتر مشترک ۲ دایره سعی می‌کنیم بین معادله دو دایره درجه دوم‌ها را حذف کنیم.

$$C-C' \Rightarrow 3x-3y=0 \Rightarrow y=x \quad \text{معادله وتر مشترک}$$

$$x=4 \xrightarrow{\text{روی وتر مشترک است}} y=x=4 \Rightarrow A(4\,,4)$$

اندازه مماسی که از $A(4\,,4)$ بر دایره $C: x^2+y^2+x-2y=0$ رسم می‌شود: $\sqrt{f(4\,,4)}=\sqrt{28}$

اندازه مماسی که از A بر دایره $C': x^2+y^2-2x+y=0$ رسم می‌شود: $\sqrt{f(4\,,4)}=\sqrt{28}$

یعنی طول ۲ مماس برابر است.

پرسش: معادله اقطار دایره‌ای به‌صورت $(m+۱)x+(m-۲)y=۶$ است:

الف) معادله این دایره را بنویسید هرگاه از نقطه $A(۲,۳)$ بگذرد.

ب) معادله قائم بر دایره (خطی که با دایره زاویه ۹۰° بسازد) که از A می‌گذرد را بنویسید.

پاسخ: **الف)** به ازای هر مقدار m یک قطر دایره به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} m+۱=۰ \Rightarrow m=-۱ \Rightarrow -۳y=۶ \\ m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \Rightarrow ۳x=۶ \end{cases} \Rightarrow M\begin{cases} x=۲ \\ y=-۲ \end{cases} \text{مرکز دایره}$$

فاصله مرکز دایره از A برابر شعاع است بنابراین: $AM=\sqrt{۰+۲۵}=۵=R$ معادله‌ی دایره $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۲۵$ است.

ب) قائم بر دایره همواره از مرکز $M(۲,-۲)$ می‌گذرد از نقطه $A(۲,۳)$ نیز می‌گذرد پس معادله خط AM را می‌نویسیم: $y-۳=\frac{-۲-۳}{۲-۲}(x-۲)$

معادله خط AM $\boxed{x=۲}$ است یا قائمی که از A می‌گذرد.

پرسش: معادله خط مماس بر دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۲۳$ در نقطه‌ای با عرض ۲ واقع بر دایره با طول مثبت را به‌دست آورید.

پاسخ: $y=۲ \xrightarrow{\text{در معادله‌ی دایره قرار داده}} x^۲+۴-۲x+۲\times۲=۲۳ \Rightarrow x^۲-۲x-۱۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۳)=۰$

پس $x=۵$ و $x=-۳$ طول نقاط مورد نظر است ولی چون نقطه با طول مثبت مطرح است. $A(۵,۲)$ موردنظر است.

$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲۵:$ (معادله‌ی دایره) $\Rightarrow (x-۱)(۵-۱)+(y+۱)(۲+۱)=۲۵$ معادله‌ی خط مماس

$\Rightarrow ۴x+۳y=۲۶ \rightarrow$ معادله‌ی خط موردنظر است.

می‌توانستیم به کمک مشتق ضمنی نیز شیب مماس را به‌دست آوریم و معادله‌ی خط مماس را بنویسیم.

$$y'=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{-(۲x-۲)}{۲y+۲} \Rightarrow m=-\frac{۸}{۶}=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow y-۲=-\frac{۴}{۳}(x-۵)$$

پرسش: از نقطه $A(۱,۰)$ داخل دایره $x^۲+y^۲-۴x-۲y=۴$ چند وتر با طول ۲ می‌توان رسم کرد؟ چند وتر با طول $۴\sqrt{۲}$ می‌توان رسم کرد؟

پاسخ: اگر A داخل دایره باشد اندازه می‌نیمم وتری که از نقطه A می‌توان رسم کرد $۲\sqrt{|f(A)|}$ است.

$A(۱,۰) \xrightarrow[x^۲+y^۲-۴x-۲y=۴]{\text{در معادله‌ی دایره قرار داده}} f(۱,۰)=f(A)=۱+۰-۴-۰-۴=-۷ \Rightarrow$ A داخل دایره است

بنابراین اندازه می‌نیمم وتر در A برابر است با $۲\sqrt{۷}\simeq ۵/۲$ پس نمی‌توان وتری با طول کم‌تر از $۵/۲$ در این نقطه یعنی A رسم کرد ولی با توجه به این‌که $۵/۲<۴\sqrt{۲}<۲R$ پس دو وتر با طول $۴\sqrt{۲}$ از نقطه A می‌توان رسم کرد.

$$x^۲+y^۲-۴x-۲y=۴ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹ \Rightarrow R=۳$$

پرسش: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که یکی از محورهای تقارن‌های آن خط $y=۳x$ و یک قطر آن به معادله $۲y-x=۵$ بوده و بر خط $۴x-۳y=۱۵$ مماس باشد.

پاسخ: هر قطر دایره یک محور تقارن آن دایره است و محل تلاقی دو قطر مرکز دایره است. بنابراین:

$$\begin{cases} y=۳x \\ ۲y-x=۵ \end{cases} \Rightarrow ۶x-x=۵ \Rightarrow (x=۱, y=۳)$$

مرکز دایره $M(۱,۳)$ است و چون بر خط $۴x-۳y=۱۵$ مماس است فاصله مرکز دایره از این خط شعاع است بنابراین: $R=\frac{|۴(۱)-۳(۳)-۱۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=۴$

و معادله دایره عبارتست از: $(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۶$

پرسش: **اولاً تحقیق کنید نقطه‌های $A(۶\,,\,۲)$ و $B(۰\,,\,۱)$ نسبت به دایره به معادله $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴$ چه وضعی دارند؟**

ثانیاً: اندازه طول مماس از نقطه‌ای که خارج دایره است بر دایره می‌توان رسم کرد به‌دست آورید.

ثالثاً: کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از این دایره چیست؟

پاسخ: **اولاً:**

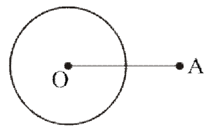
$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹ \quad\Rightarrow\quad O(۲\,,\,-۱) \text{ مرکز دایره و } R=۳ \text{ شعاع دایره}$$

$$B(۰\,,\,۱) \xrightarrow{\text{در معادله دایره قرار داده}} f(۰\,,\,۱)=-۱<۰ \quad\Rightarrow\quad B \text{ داخل دایره است}$$

$$A(۶\,,\,۲) \xrightarrow{\text{در معادله دایره قرار داده}} f(۶\,,\,۲)=۳۶+۴-۲۴+۴-۴=۱۶>۰ \quad A \text{ خارج دایره است.}$$

ثانیاً: چون $f(A)>۰$ است A خارج دایره است و اندازه مماس از نقطه‌ی A بر دایره $\sqrt{f(A)}$ است پس $(AT \text{ طول مماس } =\sqrt{۱۶}=۴)$

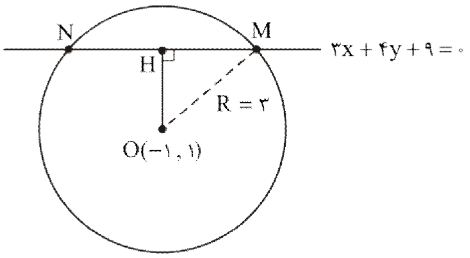
ثالثاً: فرض کنیم A یک نقطه صفحه و O مرکز دایره: $|AO-R|=$ فاصله نزدیک‌ترین نقطه دایره تا A



$$C: x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴$$

$$AO=\sqrt{۱۶+۹}=۵ \quad\Rightarrow\quad |۵-۳|=۲ = \text{ نزدیک‌ترین فاصله } A \text{ تا دایره}$$

پرسش: **طول وتری که به‌وسیله خط $۳x+۴y=-۹$ روی دایره $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۷$ به‌وجود می‌آید، به‌دست آورید.**



پاسخ: ابتدا مطابق شکل فاصله مرکز دایره $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۹$ تا خط $۳x+۴y+۹=۰$ را به‌دست‌آورده، داریم:

$$OH=\frac{|۳(-۱)+۴(۱)+۹|}{\sqrt{۹+۱۶}} \text{ یعنی } OH=۲$$

$$OH=۲ \text{ و } OM=۳ \quad\Rightarrow\quad HM=\sqrt{۹-۴}=\sqrt{۵}$$

بنابراین اندازه وتر $NM=۲\sqrt{۵}$ است.

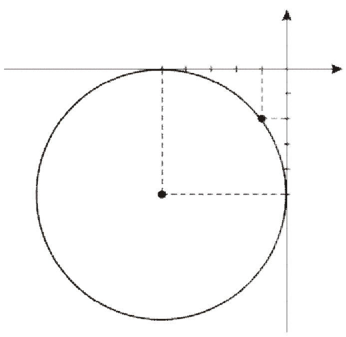
پرسش: **m را چنان بیابید که دو دایره به معادلات $C: x^۲+y^۲+۴x-۲y=m$ و $C': ۲x^۲+۲y^۲-۱۶x-۴y+۳۲=۰$ مماس خارج باشند.**

پاسخ: شرط این‌که دو دایره، مماس خارج باشند این است که $OO'=R+R'$، پس:

$$\begin{cases} C: x^۲+y^۲+۴x-۲y=m \\ C': x^۲+y^۲-۸x-۲y+۱۶=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C: (x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۵+m \\ C': (x-۴)^۲+(y-۱)^۲=۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} O(-۲\,,\,۱)\,,\, R=\sqrt{۵+m} \\ O'(۴\,,\,۱)\,,\, R'=۱ \end{cases} \Rightarrow \quad OO'=\sqrt{۳۶+۰}=۶=۱+\sqrt{۵+m} \quad\Rightarrow\quad m=۲۰$$

پرسش: **معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $A(-۱\,,\,-۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس باشد. (دو جواب)**



پاسخ: چون نقطه $A(-۱\,,\,-۲)$ در ناحیه سوم است پس مرکز دایره نقطه $(-R\,,\,-R)$ است. بنابراین معادلـه دایره $(x+R)^۲+(y+R^۲)=R^۲$ است. این دایره از $(-۱\,,\,-۲)$ می‌گذرد بنابراین این نقطه در معادله دایـره صدق می‌کند.

$$(-۱+R)^۲+(-۲+R)^۲=R^۲ \quad\Rightarrow\quad R^۲-۶R+۵=۰ \quad\Rightarrow\quad (R-۵)(R-۱)=۰ \quad\Rightarrow\quad R=\begin{cases} ۵ \\ ۱ \end{cases}$$

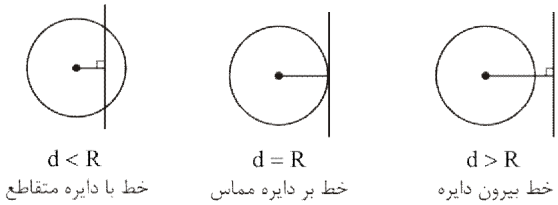
بنابراین دو دایره $(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۱$ و $(x+۵)^۲+(y+۵)^۲=۲۵$ جواب هستند.

پرسش: خط $۵x+۱۲y=۷$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x=۱$ چه وضعی دارد؟

پاسخ: $x^۲+y^۲-۲x=۱ \Rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۲$

این معادله، دایره‌ای است به مرکز $(۱\,,\,۰)$ و شعاع $\sqrt{۲}$. حال فاصله مرکز دایره از خط داده‌شده به‌دست می‌آوریم. سه حالت دارد:

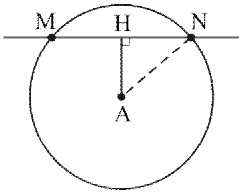
$$(۵x+۱۲y=۷ \text{ فاصله مرکز از}) = \frac{|۵(۱)+۱۲(۰)-۲|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}} = \frac{۳}{۱۳} < R$$



بنابراین خط دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

پرسش: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقطه $A(۱\,,\,۲)$ مرکز آن و روی خط $۳x+۴y+۴=۰$ وتری با طول ۸ واحد جدا کند.

پاسخ: فاصله مرکز از خط $۳x+۴y+۴=۰$ را به‌دست آورده داریم



$$AH = \frac{|۳(۱)+۴(۲)+۴|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = ۳$$

با توجه به این‌که طول وتر MN برابر ۸ است پس $HN=۴$ (به شکل توجه کنید). در مثلث AHN با توجه به رابطه فیثاغورس $AN=R=۵$ پس معادله دایره عبارتست از: $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$

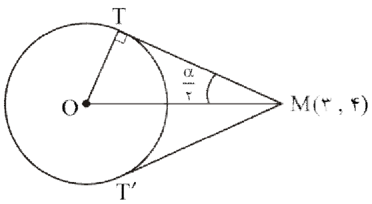
پرسش: از نقطه $M(۳\,,\,۴)$ دو مماس بر مکان نقطه $N\begin{cases}\sin\alpha+\sqrt{۳}\cos\alpha\\ \sqrt{۳}\sin\alpha-\cos\alpha\end{cases}$ رسم کرده. اندازه زاویه بین دو مماس چیست؟ $(۰\le\alpha\le۲\pi)$

پاسخ:

$$N\begin{cases}x=\sin\alpha+\sqrt{۳}\cos\alpha\\ y=\sqrt{۳}\sin\alpha-\cos\alpha\end{cases} \Rightarrow x^۲+y^۲=۴\sin^۲\alpha+۴\cos^۲\alpha \Rightarrow x^۲+y^۲=۴$$

معادله مکان نقطه M یک دایره به مرکز $O(۰\,,\,۰)$ و شعاع $R=۲$ است. با توجه به شکل: در مثلث قائم‌الزاویه OTM:

$$OT=R=۲ \text{ و } MO=\sqrt{۹+۱۶}=۵ \text{ و } MT=\sqrt{۲۵-۴}=\sqrt{۲۱}$$



$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right)=\frac{OT}{OM}=\frac{۲}{۵}\\ \cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{MT}{MO}=\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}\end{cases} \Rightarrow ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲۱}}{۲۵}$$

پس $\sin\alpha=\frac{۴\sqrt{۲۱}}{۲۵}$ در نتیجه: $\alpha=\operatorname{Arcsin}\frac{۴\sqrt{۲۱}}{۲۵}$

پرسش: معادله دایره گذرنده بر سه نقطه $A(۱\,,\,۱)$ و $B(-۱\,,\,۱)$ و $C(۰\,,\,۲)$ را بنویسید.

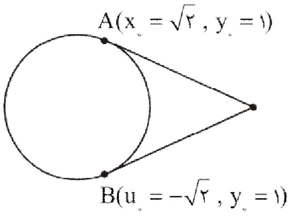
پاسخ: معادله دایره را به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by=c$ اختیار کرده

$$\left.\begin{array}{ll}C(۰\,,\,۲) \text{ می‌گذرد از} \Rightarrow & ۴+۲b=c\\ A(۱\,,\,۱) \text{ می‌گذرد از} \Rightarrow & a+b=c-۲\\ B(-۱\,,\,۱) \text{ می‌گذرد از} \Rightarrow & -a+b=c-۲\end{array}\right\} \xrightarrow{R_۲-R_۳} a=c \Rightarrow b=-۲$$

در معادله اول قرار داده: $c=۰ \Rightarrow ۴-۴=c$ پس $a=۰$ است و معادله دایره به‌صورت زیر است:

$$x^۲+y^۲-۲y=۰ \Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۱$$

پرسش: از نقطه $M(۰\,,\,۳)$ دو مماس بر دایره به معادله $x^۲ + y^۲ = ۳$ رسم کرده. اگر A و B نقاط تماس این دو مماس با دایره باشند انـدازه وتـر AB را به‌دست آورید.



پاسخ: اگر از نقطه $(x_۰\,,\,y_۰)$ واقع بر دایره $x^۲ + y^۲ = R^۲$ دو مماس بر دایره رسم کنیم، معادله خط مماس به‌صورت $xx_۰ + yy_۰ = R^۲$ است چون مماس از $(۰\,,\,۳)$ می‌گذرد پس در معادله مماس صدق می‌کند.

$$۰x_۰ + ۳y_۰ = ۳ \quad \Rightarrow \quad y_۰ = ۱$$

چون نقطه تماس $(x_۰\,,\,y_۰)$ روی دایره است پس در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x_۰^۲ + y_۰^۲ = ۲ \xrightarrow{y_۰ = ۱} x_۰ = \pm\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad AB = ۲\sqrt{۲}$$

بیضی

پرسش: معادله بیضی را بنویسید که $A(۴ , ۳)$ و $A'(-۲ , ۳)$ و $B(۱ , ۵)$ سه رأس آن باشند.

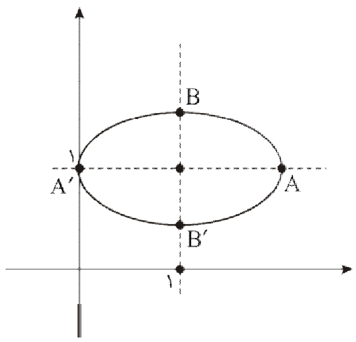
پاسخ:

$$\text{مرکز} = M = \frac{A+A'}{۲} = (۱ , ۳) \Rightarrow \begin{cases} MA = a = ۳ \\ MB = b = ۲ \\ c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = \sqrt{۵} \end{cases}$$

چون $x_A \neq x_B$ پس ((محور x) $\parallel FF'$) بنابراین معادله بیضی به‌صورت $\frac{(x-۱)^۲}{۹} + \frac{(y-۳)^۲}{۴} = ۱$ است.

پرسش: بیضی به معادله $x^۲ + ۴y^۲ - ۲x - ۸y = -۴$ را رسم کنید. معادله خط مماس در رئوس کانونی را به‌دست‌آورید.

پاسخ:



$$x^۲ + ۴y^۲ - ۲x - ۸y = -۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ + ۴[y^۲ - ۲y] = -۴ + ۱$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + ۴(y-۱)^۲ = -۴ + ۱ + ۴ \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۱} + \frac{(y-۱)^۲}{\frac{۱}{۴}} = ۱$$

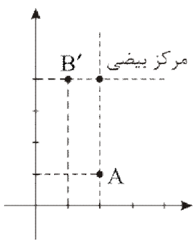
با توجه به شکل معادله خط مماس در رئوس A و A' عبارتست از: $x = ۲$ و $x = ۰$ است.

پرسش: معادله بیضی را بنویسید که $A(۲ , ۱)$ و $B'(۱ , ۴)$ دو رأس آن باشند. (A رأس کانونی و B رأس غیرکانونی)

پاسخ: با توجه به مختصات A و B در دستگاه به مختصات می‌فهمیم مرکز بیضی $M(۲ , ۴)$ است و

$$\begin{cases} MA = a = ۳ \\ MB' = b = ۱ \\ c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

و

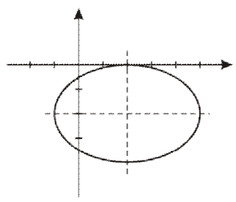


بیضی عمودی است بنابراین:

$$\frac{(x-۲)^۲}{۱} + \frac{(y-۴)^۲}{۹} = ۱ \Rightarrow$$ معادله‌ی بیضی است.

پرسش: بیضی به معادله $۴x^۲ + ۹y^۲ - ۱۶x + ۳۶y + ۱۶ = ۰$ را رسم کنید.

پاسخ:



$$۴x^۲ + ۹y^۲ - ۱۶x + ۳۶y + ۱۶ = ۰ \Rightarrow ۴[x^۲ - ۴x] + ۹[y^۲ + ۴y] = -۱۶$$

$$\Rightarrow ۴[(x-۲)^۲ - ۴] + ۹[(y+۲)^۲ - ۴] = -۱۶ \Rightarrow ۴(x-۲)^۲ + ۹(y+۲)^۲ = ۳۶$$

$$\frac{(x-۲)^۲}{۹} + \frac{(y+۲)^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{۹} = ۳ \\ b = \sqrt{۴} = ۲ \\ c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{۵} \end{cases}$$

و مرکز $= (۲ , -۲)$

پرسش: معادله بیضی را بنویسید که $A(۲ , ۷)$ و $A'(۲ , -۳)$ دو رأس کانونی آن بوده و خروج از مرکز آن $e = ۰/۸$ باشد.

پاسخ: وقتی A و A' معلوم است مرکز وسط آن دو نقطه است و چون $y_A \neq y_{A'}$ پس (محور $FF' \parallel y$)

$$\text{مرکز} = \frac{A+A'}{۲} = (۲ , ۲) = W \quad \text{و} \quad WA = a = ۵$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۸}{۱۰}\xrightarrow{a=۵}c=۴\ \Rightarrow\ b=\sqrt{a^۲-c^۲}=۳$$

$$\frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۲)^۲}{۲۵}=۱$$

پرسش: مکان هندسی نقطه‌ی $M\begin{cases}x=۱+۳\cos\theta\\ y=۲-۲\sin\theta\end{cases}$ **را به‌دست آورید** $(۰\le\theta\le ۲\pi)$. **سپس معادله‌ی خط مماس بر این مکان در نقطه‌ی** $N(۱\,,\,۰)$ **به‌دست آورید.**

پاسخ: برای به‌دست‌آوردن مکان نقطه M باید بین طول و عرض M پارامتر θ را حذف کنیم.

$$\begin{cases}\dfrac{(x-۱)}{۳}=\cos\theta\\[2mm] \dfrac{y-۲}{-۲}=\sin\theta\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{(x-۱)^۲}{۹}+\frac{(y-۲)^۲}{۴}=۱$$

نقطه $(x=۱\,,\,y=۰)$ روی بیضی است پس معادله مماس

$$\frac{(x-۱)(x_۰-۱)}{۹}+\frac{(y-۲)(y_۰-۲)}{۴}=۱\ \Rightarrow\ \frac{(x-۱)(۱-۱)}{۹}+\frac{(y-۲)(-۲)}{۴}=۱$$

$y-۲=-۲\ \Rightarrow\ y=۰$ معادله خط مماس

پرسش: مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فواصل آن‌ها از ۲ کانون بیضی $۵(x-۱)^۲+۹(y+۱)^۲=۴۵$ **برابر ۱۰ باشد.**

پاسخ: اگر F و F' دو کانون بیضی $\frac{(x-۱)^۲}{۹}+\frac{(y+۱)^۲}{۵}=۱$ باشند بدیهی است $FF'=۲c=۲\sqrt{۹-۵}=۴$ بنابراین معادله بیضی را می‌خواهیم که در آن $۲c=۴$ و $۲a=۱۰$ و مرکز آن مرکز همین بیضی است و چون این بیضی افقی است و کانون‌های این بیضی کانون‌های بیضی جدید نیز هستند آن بیضی هم افقی است.

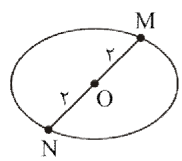
$$\begin{cases}a=۵\\ c=۲\end{cases}\ \Rightarrow\ \sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۲۱}\ \Rightarrow\ \frac{(x-۱)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۲۱}=۱$$

$(۱\,,\,-۱)$ مرکز

پرسش: خطی که از مرکز بیضی $(x-۱)^۲+۲(y-۱)^۲=۷$ **می‌گذرد و وتری به طول ۴ در بیضی می‌سازد با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟**

پاسخ: اگر O مرکز بیضی باشد به مرکز O و شعاع ۲ واحد دایره‌ای رسم کنیم نقاط M و N محل برخورد دایره فوق با بیضی به‌دست می‌آید. پس:

$$\begin{cases}(x-۱)^۲+۲(y-۱)^۲=۷\ (\text{معادله بیضی})\\ (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴\ (\text{معادله دایره})\end{cases}\xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم}}(y-۱)^۲=۳\ \Rightarrow\ y=۱\pm\sqrt{۳}$$



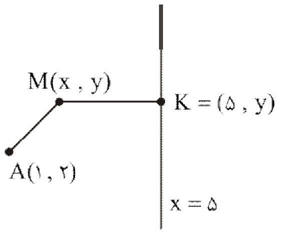
در معادله دایره یا بیضی قرار داده تا مقدار x_M و x_N را به‌دست می‌آوریم.

$$y=۱\pm\sqrt{۳}\ \Rightarrow\ (x-۱)^۲+(\pm\sqrt{۳})^۲=۴\ \Rightarrow\ x-۱=\pm ۱\ \Rightarrow\ x=۲\,,\,۰$$

$$M\Big|_{۱+\sqrt{۳}}^{۲}\,,\ N\Big|_{۱-\sqrt{۳}}^{۰}\ \Rightarrow\ m\ \text{شیب}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\ \Rightarrow\ \tan\alpha=\sqrt{۳}\ \Rightarrow\ \alpha=۶۰^\circ$$

پرسش: مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحه را بیابید که نسبت فاصله آن‌ها از نقطه $A(1, 2)$ به فاصله آن‌ها از خط $x = 5$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

پاسخ:



$$MA = \frac{1}{2}MK \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-5)^2 + 0}$$

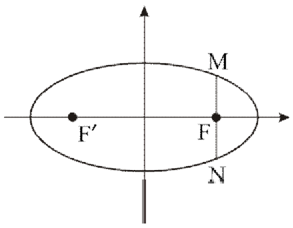
دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}(x-5)^2$$

پس از ساده‌کردن $3x^2 + 4y^2 + 2x - 16y = 5$ به‌دست‌می‌آید که معادله یک بیضی است با خروج از مرکز $e = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$.

دقت کنیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آن‌ها از نقطه A به فاصله آن‌ها از خط D برابر λ باشد در حالتی که $\lambda = 1$ باشد یک سهمی است. در حالتی که $0 < \lambda < 1$ یک بیضی با خروج از مرکز λ است. در حالتی که $\lambda > 1$ باشد یک هذلولی با خروج از مرکز λ است.

پرسش: اندازه وتری که در کانون بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بر محور کانونی عمود است به‌دست آورید.



پاسخ: اگر $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادله بیضی باشد $F(c, 0)$ کانون است. بنابراین $x_M = x_N = c$ برای بـه‌دسـت آوردن عرض M و عرض N در معادله بیضی $x = c$ قرار داده‌ایم.

$$x = c \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2(1-e^2) \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1-e^2}$$

$$M\begin{vmatrix} c \\ b\sqrt{1-e^2} \end{vmatrix}, \ N\begin{vmatrix} c \\ -b\sqrt{1-e^2} \end{vmatrix} \Rightarrow MN = 2b\sqrt{1-e^2} \Rightarrow MN = 2b\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}} \Rightarrow MN = 2b\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow MN = \frac{2b^2}{a}$$

اندازه وتر فوق $\frac{2b^2}{a}$ یا $2b\sqrt{1-e^2}$ است.