۱۰۱- پاسخ گزینه‌ی ۳ $f(x)=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$

طبق تذکر ٤ ، شرط این‌که نمودار f بالای محور x ها باشد، این است که $\Delta<0$ و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$a-1>0 \Rightarrow a>1$$

$$\Delta'=(\sqrt{2})^2-a(a-1)=2-a^2+a \xrightarrow{\Delta'<0} 2-a^2+a<0 \Rightarrow a^2-a-2>0 \Rightarrow (a-2)(a+1)>0$$

جدول تعیین علامت $(a-2)(a+1)$:

a	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(a-2)(a+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین جواب نامعادله‌ی $(a-2)(a+1)>0$ به‌صورت ($a>2$ یا $a<-1$) است که اشتراک آن با نامساوی $a>1$، به‌صورت $a>2$ است.

۱۰۲- پاسخ گزینه‌ی ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) دامنه‌ی f به صورت $D_f=\mathbb{R}^+$ و دامنه‌ی تعریف g به‌صورت $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$ است. پس این دو تابع برابر نیستند.

۲) دامنه‌ی f به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و دامنه‌ی تعریف g به‌صورت $D_g=\mathbb{R}$ است. پس این دو تابع برابر نیستند.

۳) دامنه‌ی f به صورت $D_f=\mathbb{R}^{\geq 0}$ و دامنه‌ی تعریف g به‌صورت $D_g=\mathbb{R}$ است. پس این دو تابع برابر نیستند.

٤) دامنه‌ی هر دو تابع $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}$ است. از طرفی در هر دو تابع $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ بنابراین این دو تابع برابرند.

۱۰۳- پاسخ گزینه‌ی ۴ جمله‌ی اول تصاعد $t_1=4$ و جمله‌ی سوم آن $t_3=9$ است. اگر قدر نسبت تصاعد را q بنامیم، طبق روابط تصاعد هندسی (تذکر ٤):

$$t_3=t_1q^2 \Rightarrow 9=4q^2 \Rightarrow q=\pm\frac{3}{2}$$

اگر q منفی باشد، جملات تصاعد یکی در میان مثبت و منفی می‌شود و تصاعد غیریکنواست. پس جواب قابل قبول $q=\frac{3}{2}$ است. به‌این‌ترتیب مجموع شش جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

$$S_6=\frac{t_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{4\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4\left(1-\frac{729}{64}\right)}{-\frac{1}{2}}=-8\left(1-\frac{729}{64}\right)=-8+\frac{729}{8}=\frac{665}{8}=83+\frac{1}{8}$$

۱۰۴- پاسخ گزینه‌ی ۲ می‌خواهیم ۲ ها یک در میان باشند، بنابراین عدد یا باید با ۲ شروع شود، به این صورت: ○۲○۲○۲ مثل عدد ۲۵۲۷۲٦ و یا با دو پایان‌پذیرد، به‌این‌صورت: ۲○۲○۲○ مثل عدد ۵۲۷۲٦۲.

خُب در هر کدام از دو حالت، جای ۲ ها که ثابت است، اما رقم‌های دیگر می‌توانند با هم جابه‌جا شوند که می‌دانیم که جای‌گشت ۳ رقم برابر است با !۳ یا ٦ بنابراین: ۱۲=۲×٦

۱۰۵- پاسخ گزینه‌ی ۱ ابتدا دامنه‌ی تعریف $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-1}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\sin\pi x-1\geq 0 \Rightarrow \sin\pi x\geq 1$$

مقدار سینوس نمی‌تواند بزرگتر از ۱ باشد. پس تنها حالت ممکن این است که $\sin\pi x=1$. پس:

$$\sin\pi x=1 \Rightarrow \pi x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k+\frac{1}{2}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین x های دامنه‌ی f اعداد غیرصحیح هستند و می‌دانیم در این حالت $[x]+[-x]=-۱$ است. پس برای هر x در دامنه‌ی تعریف f :

$$f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin \pi x-۱}=-۱+۰=-۱$$

پس:

$$f\left(-\frac{۱}{۲}f(x)\right)=f\left(-\frac{۱}{۲}(-۱)\right)=f\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

عدد $\frac{۱}{۲}$ در دامنه‌ی تعریف f است و طبق توضیحات داده شده $f(\frac{۱}{۲})=-۱$ می‌باشد.

۱۰۶- پاسخ گزینه‌ی ۳ طبق فرض نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۵x^۲-x+m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. پس:

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۱۶-۲۰-۲+m=۰ \Rightarrow m=۶$$

بنابراین:

$$f(x)=۲x^۳-۵x^۲-x+۶$$

با توجه به اینکه یکی از ریشه‌های این تابع $x=۲$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. با تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ ، خارج قسمت تقسیم $۲x^۲-x-۳$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x)=(x-۲)(۲x^۲-x-۳)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x=۲$) از معادله‌ی $۲x^۲-x-۳=۰$ به دست می‌آید:

$$۲x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow (x+۱)(۲x-۳)=۰ \Rightarrow x=-۱,\frac{۳}{۲}$$

۱۰۷- پاسخ گزینه‌ی ۲ طبق تعریف تابع معکوس:

$$g^{-۱}(۶)=x \Rightarrow ۶=g(x)$$

از طرفی طبق فرض $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$، پس $f(x)+\sqrt{f(x)}=۶$. حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$f(x)+\sqrt{f(x)}=۶ \Rightarrow (\sqrt{f(x)})^۲+\sqrt{f(x)}-۶=۰ \Rightarrow (\sqrt{f(x)}-۲)(\sqrt{f(x)}+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)}=۲,-۳ \xrightarrow{\sqrt{f(x)}\geq ۰} \sqrt{f(x)}=۲ \Rightarrow f(x)=۴$$

باز طبق تعریف تابع معکوس:

$$f(x)=۴ \Rightarrow x=f^{-۱}(۴)$$

مجدداً از فرض استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $f^{-۱}(t)=\sqrt[۳]{۲t}$، پس $f^{-۱}(۴)=\sqrt[۳]{۸}=۲$ ، بنابراین:

$$g^{-۱}(۶)=x=۲$$

۱۰۸- پاسخ گزینه‌ی ۱ به کمک روابط تبدیل جمع به ضرب:

$$\frac{\sin^۲ ۴۰^\circ-\sin^۲ ۱۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}=\frac{(\sin ۴۰^\circ-\sin ۱۰^\circ)(\sin ۴۰^\circ+\sin ۱۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{\left(۲\sin\frac{۴۰^\circ-۱۰^\circ}{۲}\cos\frac{۴۰^\circ+۱۰^\circ}{۲}\right)\left(۲\sin\frac{۴۰^\circ+۱۰^\circ}{۲}\cos\frac{۴۰^\circ-۱۰^\circ}{۲}\right)}{۲\cos\frac{۷۰^\circ+۱۰^\circ}{۲}\cos\frac{۷۰^\circ-۱۰^\circ}{۲}}=\frac{(۲\sin ۱۵^\circ\cos ۲۵^\circ)(۲\sin ۲۵^\circ\cos ۱۵^\circ)}{۲\cos ۴۰^\circ\cos ۳۰^\circ}$$

$$=\frac{(۲\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ)(۲\sin ۲۵^\circ\cos ۲۵^\circ)}{۲\cos ۴۰^\circ\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)}=\frac{(\sin ۲(۱۵^\circ))(\sin ۲(۲۵^\circ))}{۲\cos ۴۰^\circ\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)}=\frac{\sin ۳۰^\circ\sin ۵۰^\circ}{\sqrt{۳}\cos ۴۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin(۹۰^\circ-۴۰^\circ)}{\sqrt{۳}\cos ۴۰^\circ}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}\cos ۴۰^\circ}{\sqrt{۳}\cos ۴۰^\circ}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

از رابطه‌ی $\sin^۲ a-\sin^۲ b=\sin(a+b)\sin(a-b)$ ، مسئله خیلی سریع‌تر حل می‌شود ولی معمولاً دانش‌اموزان این رابطه را حفظ نیستند.

۱۰۹- پاسخ گزینه‌ی ۲ با فرض $u=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$:

$$\lim_{x\to 0^-} u=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right)=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{u\to+\infty} f(u)=\lim_{u\to+\infty}\left(u-\sqrt{u^2+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2-(u^2+1)}{u+\sqrt{u^2+1}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-1}{u+\sqrt{u^2+1}}=0$$

۱۱۰- پاسخ گزینه‌ی ۳

۱۱۱- پاسخ گزینه‌ی ۲ منحنی $y=\frac{x+1}{1-2x}$ یک تابع هموگرافیک است که مجانب‌های آن $x=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$ هستند. بنابراین مرکز تقارن آن $O\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ است. محل تلاقی این تابع با محورهای مختصات:

$$y=\frac{x+1}{1-2x}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x=0\ \Rightarrow\ y=1\ \Rightarrow\ A(0,1)\\ y=0\ \Rightarrow\ \frac{x+1}{1-2x}=0\ \Rightarrow\ x=-1\ \Rightarrow\ B(-1,0)\end{cases}$$

به این ترتیب شیب خط AB برابر $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-1}{-1-0}=1$ و معادله‌ی خط AB به صورت زیر است:

$$y-1=1(x-0)\ \Rightarrow\ y-x-1=0$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $O\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ تا خط $y-x-1=0$ برابر است با:

$$d=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

۱۱۲- پاسخ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم دامنه‌ی تعریف عبارت $\operatorname{Arcsin} u$ به صورت $-1\le u\le 1$ است. بنابراین دامنه‌ی تعریف این تابع از حل نامعادله‌ی $-1\le\frac{ax+b}{x-2}\le 1$ به دست می‌آید که مطابق شکل به صورت ($x\le 1$ یا $x\ge 3$) درآمده است. بنابراین به‌ازای $x=1,3$ مقدار u برابر ± 1 می‌شود. از طرفی مطابق شکل $f(1)<0$ و $f(3)>0$ است. هم‌چنین می‌دانیم $\operatorname{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ و $\operatorname{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$.
پس به‌ازای $x=1$، مقدار u برابر -1 و به ازای $x=3$، مقدار u برابر ۱ می‌شود.

$$u=\frac{ax+b}{x-2}\ \to\ \begin{cases}x=1,u=-1\\ x=3,u=1\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}-1=\frac{a+b}{-1}\\ 1=\frac{3a+b}{1}\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a+b=1\\ 3a+b=1\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$$

مطابق شکل مجانب افقی تابع خط $y=0$ است، پس:

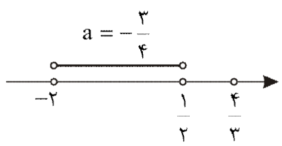
$$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arcsin}\frac{ax+b}{x-2}=0\ \Rightarrow\ \operatorname{Arcasin}\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{x-2}\right)=0\ \Rightarrow\ \operatorname{Arcsin}(a)=0\ \Rightarrow\ a=0$$

که این موضوع می‌تواند به حل مسئله کمک کند. ولی همان‌طور که دیدیم، بدون استفاده از این موضوع نیز مسئله قابل حل است.

۱۱۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\left|\frac{x-3}{2x-1}\right|>1 \xrightarrow{x\neq\frac{1}{2}} |x-3|>|2x-1| \Leftrightarrow (x-3)^2>(2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2-(x-3)^2<0 \Leftrightarrow \big((2x-1)-(x-3)\big)\big((2x-1)+(x-3)\big)<0 \Leftrightarrow (x+2)(3x-4)<0$$



جواب این نامعادله بازه‌ی $\left(-2,\frac{4}{3}\right)$ است. با توجه به شرط $x\neq\frac{1}{2}$، مجموعه جواب به صورت اجتماع دو بازه‌ی $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$ است. بازه‌ی $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ بزرگتر و بنابراین همسایگی مورد نظر مسئله است.

مرکز این همسایگی $a=\dfrac{-2+\frac{1}{2}}{2}=-\dfrac{3}{4}$ می‌باشد.

۱۱۴- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\dots+=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

حال توجه کنید که:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

با فرض $a_k=\frac{1}{n}$، خواهیم داشت $a_{n+2}=\frac{1}{n+2}$ و بنابراین حاصل سری طبق رابطه‌ی تلسکوپی برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-(0-0)\right)=\frac{3}{4}$$

۱۱۵- پاسخ گزینه‌ی ۴ با توجه به فرض‌های $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x)=\left|\left[\frac{x}{2}\right]\right|$:

$$f(a_n)=\left|\left[\frac{(-1)^n}{4n}\right]\right|=\begin{cases}\left|\left[-\frac{1}{4n}\right]\right| & n=2k-1\\ \left|\left[\frac{1}{4n}\right]\right| & n=2k\end{cases}=\begin{cases}|-1| & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}=\begin{cases}1 & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$

بنابراین جملات این دنباله یکی در میان ۰ و ۱ است و این دنباله واگراست.

۱۱۶- پاسخ گزینه‌ی ۴

۱۱۷- پاسخ گزینه‌ی ۱

۱۱۸- پاسخ گزینه‌ی ۳

۱۱۹- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$f(x)=x^2+\frac{a}{x} \Rightarrow f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

تنها نقطه‌ی بحرانی f نقطه‌ی $x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ است. ($x=0$ مجانب قائم است.) پس فقط همین نقطه می‌تواند اکسترمم نسبی باشد. برای تعیین علامت f' چون مخرج همواره مثبت است کافی است فقط صورت را تعیین علامت کنیم. به‌این‌ترتیب جدول تغییرات f در همسایگی نقطه‌ی بحرانی به شکل مقابل است:

x	$\cdots$		$\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$		$\cdots$
f'	$\cdots$	$-$	0	$+$	$\cdots$
f	$\cdots$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\cdots$

یعنی این نقطه همواره می‌نیمم نسبی f است. پس این تابع هرگز ماکسیمم نسبی ندارد.

۱۲۰- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳-x^۲}{۲} & x<۱\\ \frac{۱}{x} & x\ge ۱\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-x & x<۱\\ -\frac{۱}{x^۲} & x\ge ۱\end{cases}$$

دقت کنید که حدهای راست و چپ و مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر ۱ هستند و f در این نقطه پیوسته است. همچنین طبق قضیه‌ی حدتابع مشتق $f'_+(۱)=f'_-(۱)=-۱$ و تابع f در ۱- مشتق‌پذیر است و به همین دلیل در ضابطه‌ی f' نقطه‌ی ۱ تعریف شده است.

$$f'(x)=\begin{cases}-x & x<۱\\ -\frac{۱}{x^۲} & x\ge ۱\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}-۱ & x<۱\\ \frac{۲}{x^۳} & x>۱\end{cases}$$

توجه کنید که $f''_+(۱)=۲$ و $f''_-(۱)=-۱$ و به همین دلیل f'' در ۱ وجود ندارد. حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f''		−	‖	+	

(علامت ‖ به معنی تعریف نشده‌است.)

بنابراین تقعر f در نقطه ۱ تغییر می‌کند و چون f در این نقطه مشتق‌پذیر است، مماس بر منحنی نیز وجود دارد و این نقطه، نقطه‌ی عطف f محسوب می‌شود.

۱۲۱- پاسخ گزینه‌ی ۱ $x=۰$ مجانب قائم تابع و در نتیجه ریشه‌ی مخرج کسر است. پس $b=۰$. احتمالاً منظور طراح تست این بوده است که از روی شکل حدس بزنیم تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است و در نتیجه تابع فرد است. و بنابراین $f(-x)=-f(x)$.

$$f(x)=\frac{x^۲+ax-۳}{x^۳} \Rightarrow f(-x)=\frac{x^۲-ax-۳}{-x^۳}$$

$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow \frac{x^۲-ax-۳}{-x^۳}=-\frac{x^۲+ax-۳}{x^۳} \Rightarrow x^۲-ax-۳=x^۲+ax-۳ \Rightarrow a=۰$$

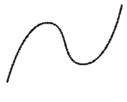
(مهم) حتماً باید در صورت مسئله، متقارن بودن نمودار نسبت به مبدأ مختصات ذکر می‌شد. چنانچه به ازای مقادیر گزینه‌های (۳) و (۴) نمودار تابع کاملاً مشابه نمودار داده شده است ولی نسبت به مبدأ متقارن نیست.

۱۲۲- پاسخ گزینه‌ی ۲ ریشه‌های معادله‌ی $x^۵-۳x+۱=۰$، ریشه‌های تابع $f(x)=x^۵-۳x+۱$ هستند. مقدار تابع f را در برخی نقاط می‌یابیم.

x	−۲	۰	۱	۲
f(x)	−۲۵	۱	−۱	۲۷
	$\boxed{-}$	$\boxed{+}$	$\boxed{-}$	$\boxed{+}$

چون تابع f پیوسته است، طبق قضیه‌ی مقدار میانی f حداقل دارای سه ریشه در بازه‌های (۰ , ۲−) ، (۱ , ۰) و (۲ , ۱) می‌باشد. از طرفی $f'(x)=۵x^۴-۳$ و

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x^۴=\frac{۳}{۵} \Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{\frac{۳}{۵}}$$



یعنی f' دارای دو ریشه ساده است و بنابراین f دارای ۲ نقطه‌ی اکسترمم می‌باشد و نمودار تقریبی آن به شکل مقابل است. واضح است این نمودار نمی‌توان در بیش از ۳ نقطه محور x ها را قطع کند. پس f دقیقاً ۳ ریشه دارد.

۱۲۳- پاسخ گزینه‌ی ۳ طبق فرض باید $f(c)$ برابر مقدار متوسط تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در بازه‌ی [۲ , ۲−] باشد. پس:

$$f(c)=\frac{۱}{۲-(-۲)}\int_{-۲}^{۲}|x^۲-۱|dx=\frac{۱}{۴}\int_{-۲}^{۲}|x^۲-۱|dx$$

جدول تعیین علامت $x^۲-۱$:

x	-۲		-۱		۱		۲
$x^۲-۱$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

بنابراین:

$$\int_{-۲}^{۲}|x^۲-۱|dx=\int_{-۲}^{-۱}|x^۲-۱|dx+\int_{-۱}^{۱}|x^۲-۱|dx+\int_{۱}^{۲}|x^۲-۱|dx=\int_{-۲}^{-۱}(x^۲-۱)dx+\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)dx+\int_{۱}^{۲}(x^۲-۱)dx$$

$$=\left(\frac{۱}{۳}x^۳-x\right)\Big|_{-۲}^{-۱}+\left(x-\frac{۱}{۳}x^۳\right)\Big|_{-۱}^{۱}+\left(\frac{۱}{۳}x^۳-x\right)\Big|_{۱}^{۲}=\left(\frac{۲}{۳}-\left(-\frac{۲}{۳}\right)\right)+\left(\frac{۲}{۳}-\left(-\frac{۲}{۳}\right)\right)+\left(\frac{۲}{۳}-\left(-\frac{۲}{۳}\right)\right)=٤$$

با جای‌گذاری در رابطه‌ی اول:

$$f(c)=\frac{۱}{٤}\int_{-۲}^{۲}|x^۲-۱|dx \Rightarrow f(c)=\frac{۱}{٤}(٤) \Rightarrow |c^۲-۱|=۱ \Rightarrow c^۲-۱=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases}c^۲=۰\\ c^۲=۲\end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب c به‌صورت $\{-\sqrt{۲},۰,\sqrt{۲}\}$ است.

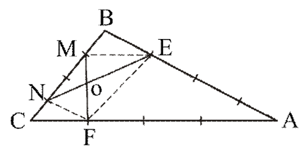
۱۲۴- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{(n+i)^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{\left(n\left(۱+\frac{i}{n}\right)\right)^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲\left(۱+\frac{i}{n}\right)^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}\frac{۱}{\left(۱+\frac{i}{n}\right)^۲}$$

طبق رابطه‌ی تذکر ۱۱:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}\frac{۱}{\left(۱+\frac{i}{n}\right)^۲}=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{(۱+x)^۲}dx=\int_{۰}^{۱}(۱+x)^{-۲}dx=-(۱+x)^{-۱}\Big|_{۰}^{۱}=-\frac{۱}{۲}-(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۵- پاسخ گزینه‌ی ۱

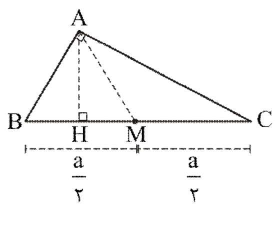


$\frac{BE}{EA}=\frac{CE}{FA}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF\parallel BC \Rightarrow$ MNFE ذوزنقه است.

در ذوزنقه‌ی MNEF $\Rightarrow S\overset{\Delta}{MEF}=S\overset{\Delta}{NEF}$ (زیرا ارتفاع و قاعده‌ی مشترک دارند) $\xrightarrow[OEF]{-S^{\Delta}} S\overset{\Delta}{MOE}=S\overset{\Delta}{ONF}$

$\left.\begin{matrix}\text{از طرفی } MB=CN\\ \text{ارتفاع مشترک دو مثلث MBE و CNF } MH\end{matrix}\right\} \Rightarrow S\overset{\Delta}{MBE}=S\overset{\Delta}{CNF} \Rightarrow SMOEB=SNOFC$

۱۲۶- پاسخ گزینه‌ی ۴



$$AC=\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB \ (۱)$$

$$AB^۲+AC^۲=BC^۲ \xrightarrow{(۱)} AB^۲+\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB\right)^۲=a^۲ \Rightarrow \frac{۹}{٤}AB^۲=a^۲ \Rightarrow AB=\frac{۲}{۳}a$$

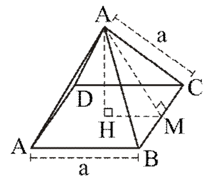
$$AB^۲=BH.BC \Rightarrow \left(\frac{۲}{۳}a\right)^۲=BH.a \Rightarrow BH=\frac{٤}{۹}a \Rightarrow HM=\frac{a}{۲}-\frac{٤a}{a}=\frac{a}{۱۸}$$

$$\frac{S\overset{\Delta}{ABC}}{S\overset{\Delta}{AMH}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}AH}\times BC}{\cancel{\frac{۱}{۲}AH}\times HM}=\frac{a}{\frac{a}{۱۸}}=۱۸$$

۱۲۷- پاسخ گزینه‌ی ۱

سطح کل هرم: $٤S\overset{\Delta}{SBC}+SABCD=٤\times\frac{\sqrt{۳}}{٤}a^۲+a^۲=a^۲(۱+\sqrt{۳})$

$\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=} ۱۸(۱+\sqrt{۳}) \Rightarrow a^۲=۱۸ \Rightarrow a=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$ (رابطه‌ی ۱)



$HM = \frac{a}{2}$ و $SM = S\overset{\Delta}{B}C$ ارتفاع $= \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

حجم هرم $= \frac{1}{3}S_{ABCD} \times SH = \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \overset{(1)}{=} 18$

۱۲۸- پاسخ گزینه‌ی ۳

اضلاع مثلث: $5\,,\,7\,,\,a \geq 8$

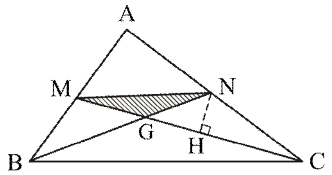
طبق قضیه‌ی حمار: $7 - 5 < a < 7 + 5 \Rightarrow 2 < a < 12 \xrightarrow{a \geq 8} 8 \leq a < 12$

$\Rightarrow \min(a) = 8 \Rightarrow$ حداقل مقدار محیط مثلث $= 5 + 7 + 8 = 20$

از طرفی داریم: $\frac{3}{4}$ محیط $< m_a + m_b + m_c <$ محیط

$\Rightarrow \underbrace{\frac{3}{4} \times 20}_{15} << m_a + m_b + m_c < 20 \Rightarrow$ در بین گزینه‌ها فقط عدد ۱۹ در بازه‌ی مقابل قرار دارد.

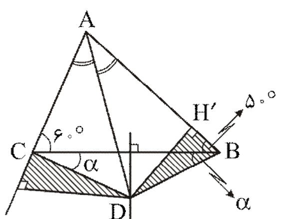
۱۲۹- پاسخ گزینه‌ی ۴ محل برخورد میانه‌ها است. پس: $GC = 2GM$ حال اگر ارتفاع NH را رسم کنیم داریم:



$S\overset{\Delta}{GNC} = 2S\overset{\Delta}{MNG}$

از طرفی: $S\overset{\Delta}{ABC} = 6S\overset{\Delta}{GNC} \overset{(1)}{=} 6 \times 2S\overset{\Delta}{MNG} = 12S\overset{\Delta}{MNG}$

۱۳۰- پاسخ گزینه‌ی ۳ برای حل این تست بهتر است ابتدا به تعریف‌های عمودمنصف و نیمساز اشاره کنیم.



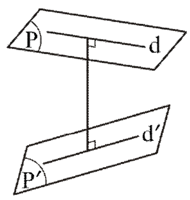
۱) عمودمنصف هر پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو سر پاره‌خط یکسان باشد.

۲) نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو ضلع زاویه یکسان باشد.

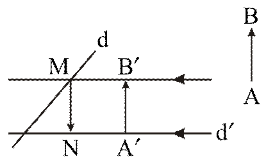
پاسخ: از نقطه‌ی D محل تلاقی عمودمنصف ضلع BC و نیمساز $\hat{A}$ به B و C وصل می‌کنیم، پس طبق (۲) $DC = DB$ همچنین از D دو عمود DH و DH' را بر اضلاع AC و AB رسم می‌کنیم، پس طبق (۱)، $DH = DH'$.

در نتیجه، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی DBH' و DCH به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند. پس $\widehat{HCD} = \widehat{DBH'} = 50^\circ + \alpha$

$\widehat{HCD} + \widehat{DCA} = 180^\circ \Rightarrow (50 + \alpha) + (60 + \alpha) = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$

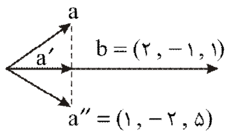


۱۳۱- پاسخ گزینه‌ی ۱ مطابق شکل مقابل اگر d و d' متنافر باشند، فقط یک جفت صفحه می‌توان از d و d' عبور داد که با هم موازی باشند. توجه کنید که اگر دو صفحه موازی هم می‌باشند، بی‌شمار جفت صفحه‌ی موازی هم و اگر دو صفحه، متقاطع (یا عمود بر هم) باشند، فقط یک صفحه‌ی منحصربه‌فرد (و نه جفت صفحه) از خطوط d و d' می‌گذرد.



۱۳۲- پاسخ گزینه‌ی ۲ مطابق شکل یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی B' برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع بر خط d' حاصل شود. اکنون پاره‌خط MN همان پاره‌خطی است که دوسر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی‌الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره‌خط‌ها را تغییر دهد و به‌همین دلیل گزینه‌های ۳ و ۴ از ابتدا به‌راحتی حذف می‌شوند.

۱۳۳- پاسخ گزینه‌ی ۳ بردارهای $\vec{a}'$ و $\vec{b}$ هم‌راستا هستند. بنابراین عددی مثل $k \neq ۰$ وجود دارد که $\vec{a} + \vec{a}'' = k\vec{b}$ و $\vec{a} = (a_۱ , a_۲ , a_۳)$. حال می‌توان چنین نوشت:



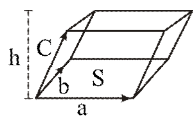
$$(a_۱ , a_۲ , a_۳) + (۱ , -۲ , ۵) = k(۲ , -۱ , ۱) \;\Rightarrow\; a_۱ = ۲k - ۱ , a_۲ = -k + ۲ , a_۳ = k - ۵$$

$$|\vec{a}'| = |\vec{a}''| \;\Rightarrow\; (۲k-۱)^۲ + (-k+۲)^۲ + (k-۵)^۲ = ۱^۲ + (-۲)^۲ + ۵^۲$$

که در معادله‌ی فوق اعداد $k = ۰$ و $k = ۳$ صدق می‌کند که فقط $k = ۳$ قابل قبول است و به‌ازای آن $\vec{a} = (۵ , -۱ , -۲)$ به‌دست می‌آید.

۱۳۴- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = (-۳ , -۶ , ۲)$$



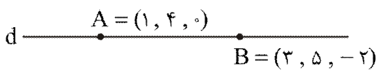
مساحت قاعده‌ی متوازی السطوح $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{۹ + ۳۶ + ۴} = \sqrt{۴۹} = ۷$

حجم متوازی‌السطوح $V = |\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})| = |(۴ , ۰ , -۱).(-۳ , -۶ , ۲)| = |-۱۲ - ۲| - |۴| = ۱۴$

$$V = S.h \;\Rightarrow\; h = \frac{V}{S} = \frac{|\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{۱۴}{۷} = ۲$$

۱۳۵- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (۲ , ۱ , -۲) \\ \text{با نقطه‌ی } A \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; d: \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۴}{۱} = \frac{z}{-۲}$$

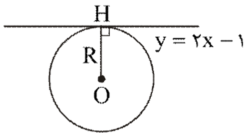


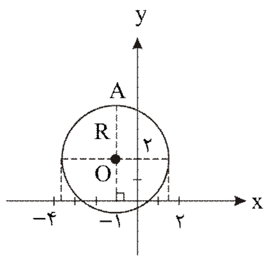
فاصله‌ی o از خط d $oH = \dfrac{|\overrightarrow{oA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ و $|\vec{u}| = |(۲ , ۱ , -۲)| = \sqrt{۴ + ۱ + ۴} = ۳$

$$\overrightarrow{oA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = (-۸ , ۲ , -۷) \;\Rightarrow\; |\overrightarrow{oA} \times \vec{u}| = |(-۸ , ۲ , -۷)| = \sqrt{۶۴ + ۴ + ۴۹} = \sqrt{۱۱۷} = \sqrt{۱۳ \times ۹} = ۳\sqrt{۱۳}$$

$$oH = \frac{۳\sqrt{۱۳}}{۳} = \sqrt{۱۳}$$

۱۳۶- پاسخ گزینه‌ی ۱ تمام قائم‌های هر دایره از مرکز آن می‌گذرند؛ بنابراین طبق گفته‌ی سؤال نقطه‌ی $(-۱ , ۲)$ مرکز دایره است و از آن‌جا که دایره برخط مماس شده‌است پس فاصله‌ی مرکز دایره تا آن خط برابر با طول شعاع دایره است.





$$oH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲ - ۲(-۱) + ۱|}{\sqrt{۱ + ۴}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۵$$

بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از محور xها $AH = R + oH = \sqrt{۵} + ۲$

۱۳۷- پاسخ گزینه‌ی ۴ ابتدا مقطع مخروطی غیراستاندارد را با دوران محورها به اندازه‌ی مناسب استاندارد و سپس فاصله‌ی کانونی را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{b}{a-c} = \frac{۱}{۰-۰} = \text{تعریف‌نشده} \;\Rightarrow\; ۲\alpha = \frac{\pi}{۲} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y') \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' + y') \end{cases} \xrightarrow[xy=\frac{۳}{۲}]{\text{جای‌گذاری در معادله‌ی}} \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y') \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' + y') = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}} \frac{x'^{۲}}{۳} - \frac{y'^{۲}}{۳} = ۱ \Rightarrow c = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} = \sqrt{۳ + ۳} = \sqrt{٦} \Rightarrow FF' = ۲c = ۲\sqrt{٦}$$

۱۳۸- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ٤ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ۲۰a - ۱۸۹ \\ \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ٥ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ۲٥a - ۱۹۸ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{فرض سؤال}]{\text{با توجه به}} (۲۰a - ۱۸۹) + ٦ = ۲٥a - ۱۹۸ \Rightarrow ٥a = ۱٥ \Rightarrow a = ۳$$

۱۳۹- پاسخ گزینه‌ی ۱ **حل به روش عددگذاری:** فرض کنیم $a = ۱$ و $b = -۱$ باشد. دراین‌صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ٤(a+b) \\ ۱ & a+۱ & a^{۲}(b+۲) \\ ۱ & b+۱ & b^{۲}(a+۲) \end{vmatrix} \xrightarrow[b=-۱]{a=۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۹ - ۹ = ۰$$

تنها گزینه‌ی ۱ به‌ازای $a = ۱$ و $b = -۱$، صفر می‌شود و همین گزینه پاسخ صحیح است.

۱۴۰- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$I - A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -٤ \\ ۰ & ۱ & -٥ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |I - A| = ۱$$

$$A^{-۱}_{۲۳} = \frac{A_{۳۲}}{|A|} = \frac{(-۱)^{٥}(-٥)}{۱} = ٥$$

۱۴۱- پاسخ گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که دسته‌ی اول به‌صورت ۲۵ − ۲۲ است، می‌توانیم نتیجه بگیریم طول هر دسته برابر ۳ است.

حدود چند دسته‌ی اول را مشخص می‌کنیم تا به دسته‌ای با عدد پایانی ۳٤ برسیم:

۲۲ − ۲٥

۲٥ − ۲۸

۲۸ − ۳۱

۳۱ − ۳٤

در صورت سؤال گفته‌شده ٤٥ درصد داده‌ها کم‌تر از ۳٤ است، این یعنی نسبت مجموع فراوانی‌های ٤ دسته‌ی اول به کل فراوانی‌ها برابر ٤٥ درصد است. یعنی $\frac{٤٥}{۱۰۰} = \frac{f_{۱} + f_{۲} + f_{۳} + f_{٤}}{\Sigma f}$ با توجه به این‌که $\Sigma f = ۱۲۰$ است داریم:

$$\frac{f_{۱} + f_{۲} + f_{۳} + f_{٤}}{۱۲۰} = \frac{٤٥}{۱۰۰} \Rightarrow f_{۱} + f_{۲} + f_{۳} + f_{٤} = ٥٤$$

هم‌چنین فراوانی نسبی دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی پنجم (دقت کنید چون ۹ دسته داریم، دسته‌ی وسط، دسته‌ی پنجم است.) برابر است با ۰/۲ یعنی:

$$\frac{f_{٥}}{\Sigma f} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow \Sigma f = ٥f_{٥} \Rightarrow ۱۲۰ = ٥f_{٥} \Rightarrow f_{٥} = ۲٤$$

حالا تعداد داده‌های کم‌تر از ۳۷ یعنی مجموع فراوانی پنج دسته‌ی اول. داریم:

$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=54+24=78$$

۱۴۲- پاسخ گزینه‌ی ۱ **راه حل اول:** داریم

x_i	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
f_i	۳	۲	۹	۶	۱

ابتدا $\bar{x}$ را با توجه به فرمول $\bar{x}=\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{6\times3+8\times2+10\times a+12\times6+14}{3+2+a+6+1}=\frac{120+10a}{12+a}=10$$

حالا با استفاده از رابطه‌ی $\delta^2=\frac{\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma f_i}$، a را پیدا می‌کنیم:

$$6=\frac{3(6-10)^2+2(8-10)^2+a(10-10)^2+6(12-10)^2+(14-10)^2}{12+a}$$

$$\Rightarrow\ 6=\frac{48+8+24+16}{12+a}\ \Rightarrow\ 72+6a=96\ \Rightarrow\ 6a=24\ \Rightarrow\ a=4$$

راه حل دوم: می‌دانیم مقدار واریانسی از رابطه‌ی $\delta^2=\frac{\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma f_i}$ به‌دست می‌آید. اما به‌جز این رابطه واریانس را می‌شد از رابطه‌ی $\delta^2=\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i}-\bar{x}^2$ نیز به دست آورد. داریم:

نشان دسته x_i	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی f_i	۳	۲	a	۶	۱

می‌دانیم $\delta^2=\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i}-\bar{x}^2$ با جای‌گذاری در این دو رابطه:

$$\bar{x}=\frac{18+16+10a+72+14}{3+2+a+6+1}=\frac{120+10a}{12+a}=20$$

$$\frac{36\times3+64\times2+100\times a+144\times6+196}{3+2+a+6+1}-10^2=6\ \Rightarrow\ \frac{1296+100a}{12+a}=106$$

$$\Rightarrow\ 1296+100a=1272+106a\ \Rightarrow\ 24=6a\ \Rightarrow\ a=4$$

۱۴۳- پاسخ گزینه‌ی ۳ ببینید، شما هر دوتایی مرتبی از عددهای صحیح درنظر بگیرید، در یکی از این ٤دسته‌ی روبه‌رو قرار می‌گیرند:

	مؤلفه‌ی اول	مؤلفه‌ی دوم
(۱):	فرد	فرد
(۲):	فرد	زوج
(۳):	زوج	فرد
(۴):	زوج	زوج

حالا اگر دو زوج مرتب از یک دسته در نظر بگیرید، مجموع مؤلفه‌های اول آن‌ها، هم‌چنین مجموع مؤلفه‌های دوم آن زوج می‌شود. مثال می‌زنم تا بهتر بفهمید. از دسته‌ی اول دو زوج مرتب در نظر بگیرید. مثلاً $(5,1)$ و $(9,3)$ الآن اگر مؤلفه‌های اول را با هم جمع کنیم، هم‌چنین اگر مؤلفه‌های دوم را جمع کنیم داریم $(14,4)$ که هر دو زوج‌اند. بنابراین اگر دو زوج مرتب از دسته‌ی اول یعنی دو زوج مرتب که هر دو مؤلفه‌ی آن فرد باشد را با هم جمع کنیم $a+c$ و $b+d$ هر دو زوج می‌شوند.

در مورد دسته‌های دیگر هم همین‌طور است؛ یعنی اگر دو زوج مرتب از هر دسته برداریم مجموع مؤلفه‌ها زوج می‌شوند. در مورد دسته‌های دیگر نیز مثال می‌زنیم:

دسته‌ی دوم: $(3,4)\,,\,(5,8)\ \overset{\oplus}{\Rightarrow}\ (8,12)$

دسته‌ی سوم: $(4,1)\,,\,(8,3)\ \overset{\oplus}{\Rightarrow}\ (12,4)$

دسته‌ی چهارم: $(۲ , ٤) , (۰ , ۲) \overset{\oplus}{\Rightarrow} (۲ , ٦)$

بنابراین اگر بخواهیم $a+c$ و $b+d$ هر دو زوج نشوند، در نهایت از هر دسته فقط می‌توان یک دوتایی مرتب برداشت و به‌محض این‌که زوج مرتب پنجم را برداریم از یکی از دسته‌ها دو زوج مرتب خواهیم‌داشت و در نتیجه اگر پنج دوتایی مرتب از عددهای صحیح انتخاب کنیم، دست‌کم دو تا از زوج مرتب‌ها وجود دارد که $a+c$ و $b+d$ هر دو زوج باشند.

۱۴۴- پاسخ گزینه‌ی ۴ مجموعه‌ی A دارای چهار عضو است $\{b\} , \{a\} , b , a$ اما مجموعه‌ی $\{A\}$ فقط یک عضو دارد که A است، یعنی این عضو به‌صورت $\{\{b\} , \{a\} , b , a\}$ است. می‌بینیم A و $\{A\}$ هیچ عضو مشترکی ندارند. بنابراین $A-\{A\}$ همان چهار عضو را دارد.

می‌دانیم یک مجموعه‌ی n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است، بنابراین $A-\{A\}$ دارای ۱٦ زیرمجموعه است. اما چون زیرمجموعه‌های سره و غیرتهی از این مجموعه را خواسته‌است، از این ۱٦ زیرمجموعه $\varnothing$ و خودش را حذف می‌کنیم و می‌ماند ١٤ زیرمجموعه.

۱۴۵- پاسخ گزینه‌ی ۲ با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ساده می‌کنیم:

$$C\cup A'\cup B' = C\cup(A\cap B)'$$

حالا متمم می‌گیریم:

$$(C\cup(A\cap B)')' = C'\cap(A\cap B) = (A\cap B)-C$$

بنابراین گزینه‌ی ٤ درست است. اما:

$$A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C) = A\cap(B-C)$$

پس گزینه‌ی ۲ پاسخ سؤال است.

۱۴۶- پاسخ گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $B=\{۱۱ , ۱۳ , ... , ٤۷\}$ و $A=\{۱ , ۲ , ... , ۹\}$ بنابراین:

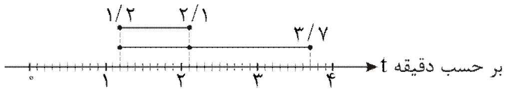
$$A\times B=\{(۱ , ۱۱)(۱ , ۱۳) , ... , (۹ , ٤۷)\}$$

حالا می‌خواهیم ببینیم رابطه‌ی هم‌ارزی $(x , y)R(a , b) \Leftrightarrow x=a$، $A\times B$ را به چند کلاس افراز می‌کند. ببینید زوج مرتب‌هایی که مؤلفه‌های اول آن یکسان هستند با هم در رابطه‌اند. مثلاً همه‌ی زوج مرتب‌های $(۱ , ۱۱)(۱ , ۱۳) , ... , (۱, ٤۷)$ با هم در رابطه هستند، بنابراین همه‌ی آن عضو یک کلاس هم‌ارزی هستند. همین‌طور است درباره‌ی زوج مرتب‌هایی که با ۲ شروع می‌شوند، یعنی $(۲ , ۱۱)(۲ , ۱۳) , ... , (۲ , ٤۷)$ و به همین ترتیب زوج مرتب‌های $(۹ , ۱۱)(۹ , ۱۳) , ... , (۹ , ٤۷)$ نیز عضو یک کلاس هستند. بنابراین این رابطه مجموعه‌ی $A\times B$ را به ۹ کلاس افراز می‌کند، برای فهم بیش‌تر شکل زیر را ببینید:

$A\times B$

(۹ , ۱۱) (۹ , ۱۳) ⋮ (۹ , ٤۷)	…	(۳ , ۱۱) (۳ , ۱۳) ⋮ (۳ , ٤۷)	(۲ , ۱۲) (۱ , ۱۳) ⋮ (۱ , ٤۷)	(۱ , ۱۱) (۱ , ۱۳) (۱ , ۱۷) ⋮ (۱ , ٤۷)

۱۴۷- پاسخ گزینه‌ی ۳ به محور زیر نگاه کنید. دارو در زمان بین ۱/۲ دقیقه و ۳/۷ دقیقه اثر می‌کند. بنابراین فضای نمونه‌ای آزمایش، طول محور در این فاصله است، یعنی: $۲/۵=۱/۲-۳/۷$. اما پیش‌آمد موردنظر ما زمان‌هایی از این بازه است که کم‌تر از ۲/۱ دقیقه است. یعنی بازه‌ی بالایی روی شکل: دقیقه $۰/۹=۱/۲-۲/۱$ بنابراین احتمال موردنظر برابر است با: $\frac{۰/۹}{۰/۲۵}=۰/۳٦$



۱۴۸- پاسخ گزینه‌ی ۳ برای پیداکردن تعداد عددهایی که نه مضرب ٤ باشند؛ نه مضرب ٥ ابتدا عددهایی که مضرب ٤ یا ٥ است را به‌دست می‌آوریم و از کل عددها کم می‌کنیم. داریم:

کل عددها: $۵۰۰-۲۰۱+۱=۳۰۰$

مضارب ٤: A: $\left[\frac{۵۰۰}{٤}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{٤}\right]=۱۲۵-۵۰=۷۵$

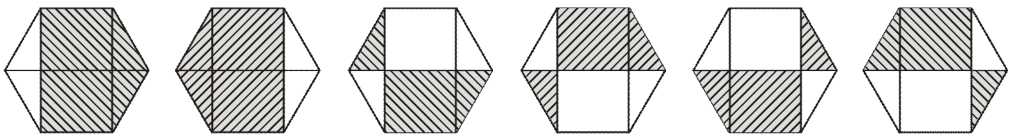
B :۵ مضارب: $\left[\frac{۵۰۰}{۵}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۵}\right]=۱۰۰-۴۰=۶۰$

AOB :۲۰ مضارب: $\left[\frac{۵۰۰}{۲۰}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right]=۲۵-۱۰=۱۵$

$$\Rightarrow\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۵+۶۰-۱۵=۱۲۰ \ \Rightarrow\ A'\cap B'=۳۰۰-۱۲۰=۱۸۰$$

حالا احتمال خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم: $\frac{۱۸۰}{۳۰۰}=\frac{۶۰}{۱۰۰}$

۱۴۹- پاسخ گزینه‌ی ۴ هیچ راهی به‌جز شماردن نداریم. برای این‌که بهتر متوجه شوید همه‌ی دورهای به طول پنج را در شکل جداگانه هاشور می‌زنم:



می‌بینید که شش دور به طول پنج وجود دارد.

۱۵۰- پاسخ گزینه‌ی ۲ می‌دانیم زاویه‌های روی قطر اصلی $A^۲$ همان درجه‌های رأس‌ها هستند. بنابراین مجموع درایه‌های $A^۲$ می‌شود مجموع درجه‌ها و چون گراف کامل است مجموع درجه‌ها در گراف کامل P رأسی برابر است با $p(p-۱)$.

$p(p-۱)$ یعنی حاصل‌ضرب دو عدد پشت سر هم. در میان گزینه‌ها تنها ۷۲ چنین خاصیتی دارد. $۷۲=۸\times۹$

۱۵۱- پاسخ گزینه‌ی ۱ عدد را x می‌نامیم. داریم:

$$x\overset{۱۱}{\equiv}۵ \qquad x\overset{۱۴}{\equiv}۸ \qquad x\overset{۱۵}{\equiv}۹$$

اما اگر کلاس‌های هم‌ارزی $[۵]_{۱۱}$، $[۸]_{۱۴}$ و $[۹]_{۱۵}$ را تشکیل دهیم داریم:

$$[۵]_{۱۱}=\{\dots,-۶,۵,۱۶,\dots\}$$
$$[۸]_{۱۴}=\{\dots,-۶,۸,۲۲,\dots\}$$
$$[۹]_{۱۵}=\{\dots,-۶,۹,۲۶,\dots\}$$

مشاهده می‌کنیم عدد -۶ در هر سه کلاس وجود دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} x\overset{۱۱}{\equiv}-۶ \\ x\overset{۱۴}{\equiv}-۶ \\ x\overset{۱۵}{\equiv}-۶ \end{cases} \Rightarrow x\overset{[۱۱,۱۴,۱۵]}{\equiv}-۶$$

اما $۲۳۱۰=۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱=[۱۱,۲\times۷,۳\times۵]=[۱۱,۱۴,۱۵]$ بنابراین:

$$x\overset{۹۲۴}{\equiv}-۶ \Rightarrow x=۲۳۱۰q-۶$$

کم‌ترین مقدار x زمانی است که q برابر یک باشد. بنابراین:

$$x_{min}=۲۳۰۴$$

حالا ۲۳۰۴ را تجزیه می‌کنیم، ببینیم مضرب کدام گزینه است:

$$۲۳۰۴=۲^۸\times۳^۲$$

می‌بینیم ۲۳۰۴ مضرب ۳۶ است.

۱۵۲- پاسخ گزینه‌ی ۲ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد را d می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} d|۹n+۲ \xrightarrow{۱۱\times\ \text{سمت راست}} d|۹۹n+۲۲ \\ d|۱۱n+۷ \xrightarrow{۹\times\ \text{سمت راست}} d|۹۹n+۶۳ \end{cases} \xrightarrow{-} d|۴۱ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۴۱$$

اما چون گفته‌شده دو عدد نسبت به هم اول نیستند، پس $d=۴۱$. حالا چون ب.م.م برابر ۴۱ است هر کدام از دو عدد بر ۴۱ بخش‌پذیرند. مثلاً:

$$۹n+۲\overset{۴۱}{\equiv}۰ \Rightarrow ۹n\overset{۴۱}{\equiv}-۲\overset{۴۱}{\equiv}۳۹ \xrightarrow{\div۳} ۳n\overset{۴۱}{\equiv}۱۳\overset{۴۱}{\equiv}۵۴ \xrightarrow{\div۳} n\overset{۴۱}{\equiv}۱۸ \Rightarrow n=۴۱q+۱۸$$

پس کوچک‌ترین مقدار n برابر ۱۸ است که در میان گزینه‌ها بر ۶ بخش‌پذیر است.

۱۵۳- پاسخ گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $۳۵ = ۸ + ۲۷$ یعنی $۳^۳ + ۲^۳ \overset{۳۵}{\equiv} ۰$ یا $۳^۳ \overset{۳۵}{\equiv} (-۲)^۳$ بنابراین اگر طرفین را به توان ۲۰ برسانیم، داریم:

$$۳^{۶۰} \overset{۳۵}{\equiv} (-۲)^{۶۰} \Rightarrow ۳^{۶۰} \overset{۳۵}{\equiv} ۲^{۶۰}$$

پس $۳^{۶۰}$ و $۲^{۶۰}$ در تقسیم به ۲۵ هم باقی‌مانده‌اند. داریم:

$$۶^۲ \overset{۳۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۶^{۶۰} \overset{۳۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۶^{۶۰} + ۳^{۶۰} - ۲^{۶۰} \overset{۳۵}{\equiv} ۱ + ۳^{۶۰} - ۳^{۶۰} = ۱$$

۱۵۴- پاسخ گزینه‌ی ۲ p (سالم بودن محصول) $= p$ (از دستگاه A باشد.) p (سالم باشد. | از دستگاه A باشد.)

$+p$ (از دستگاه B باشد.) p (سالم باشد. | از دستگاه B باشد.)

$+p$ (از دستگاه C باشد.) p (سالم باشد. | از دستگاه C باشد.)

$$= \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۹۹}{۱۰۰} + \frac{۴۵}{۱۰۰} \times \frac{۹۸}{۱۰۰} + \frac{۲۵}{۱۰۰} \times \frac{۹۶}{۱۰۰} = ۰/۹۷۸$$

۱۵۵- پاسخ گزینه‌ی ۴ از احتمال متمم استفاده می‌کنیم. یعنی ابتدا احتمال این‌که رنگ مهره‌ها یکسان باشد را پیدا می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. اما اگر بخواهیم رنگ مهره‌ها یکسان باشد، یعنی این‌که یا هر دو مهره سبز باشد یا هر دو سفید.

p (رنگ‌ها یکسان باشد.) $= p$ (هر دو سبز) $+p$ (هر دو سفید)

$= p$ (اولی سبز و دومی سبز) $+p$ (اولی سفید و دومی سفید) $= \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۸} + \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۲}{۸} = \frac{۲۶}{۸۰} \Rightarrow ۱ - \frac{۲۶}{۸۰} = \frac{۵۴}{۸۰} = \frac{۲۷}{۴۰}$

حساب دیفرانسیل و انتگرال: مهندس مهرداد عباس‌پور

هندسه پایه و تحلیلی: مهندس رضا شریف‌خطیبی
مهندس علیرضا شریف‌خطیبی

ریاضیات گسسته: مهندس عطا صادقی