۱۰۱- پاسخ گزینه‌ی ۲ برای آن‌که نمودار تابع $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{x^2+4}$ پایین‌تر از $y=2$ باشد باید:

$$1)\ f(x)<2 \Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2 \xrightarrow[x^2+4>0]{(2)} 3x^2-2x<2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8<0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2)<0 \Rightarrow$$

x		−۲		۴	
y	+	۰	−	۰	+

پس عبارت فوق در بازه $(-2\,,\,4)$ منفی است پس طول بازه یا مقدار $b-a=4+2=6$ است.

برای آن‌که تابع $y=f(x)$ پایین تابع $y=g(x)$ باشد باید: $f(x)<g(x)$ درنظر گرفته شود.

اگر طرفین یک معادله در یک مقدار مثبت ضرب شود جهت نامعادله تغییر نمی‌کند.

۱۰۲- پاسخ گزینه‌ی ۴ $R=\{x\,,y\,|\,x\,,y\in N\,,\,2x+y\le 7\}$

$x=1 \Rightarrow 2+y\le 7 \Rightarrow y\le 5 \Rightarrow y=1,2,3,4,5 \Rightarrow y=(1,1)(1,2)(1,3)(1,4),(1,5)$

$x=2 \Rightarrow 4+y\le 7 \Rightarrow y\le 3 \Rightarrow y=1,2,3 \Rightarrow y=(2,1)(2,2)(2,3)$

$x=3 \Rightarrow 6+y\le 7 \Rightarrow y\le 1 \Rightarrow y=(3,1)$

$9=1+3+5=$ تعداد زوج مرتب‌های صادق در رابطه

۱۰۳- پاسخ گزینه‌ی ۱ $\log(2x-1)+\frac{1}{2}\log x^2=\log 3 \Rightarrow \log(2x-1)+\log(x^2)^{\frac{1}{2}}=\log 3$

$$\log(2x-1)+\log x=\log 3 \xrightarrow{(2)} \log(2x^2-x)=\log 3$$

با فرض $\begin{cases} x>0 \\ 2x-1>0 \xrightarrow{(5)} x>\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow 2x^2-x=3 \Rightarrow 2x^2-x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \ \text{غ. ق. } (6) \\ x=\frac{3}{2}\checkmark\end{cases}$

$$\Rightarrow \log_4^{\frac{x}{3}}=\log_4^{\frac{1}{2}}=\log_{2^2}^{2^{-1}} \underset{(3)}{=} -\frac{1}{2}\log_2^2 \underset{(4)}{=} -\frac{1}{2}$$

چند یادآوری:

$1)\ \log A^n=n\log A$

$2)\ \log AB=\log A+\log B$

$3)\ \log_{B^m}^{A^n}=\frac{n}{m}\log_B^A$

$4)\ \log_a^a=1$

$5)\ y=\log_{g(x)}^{f(x)} \Rightarrow D_y: f(x)>0\,,\ g(x)>0\,,\ g(x)\neq 1$

۶) در هر معادله درجه II، $ax^2+bx+c=0$، اگر مجموع ضرایب $a+c$ برابر b باشد مقدار دو ریشه x_1 و x_2:

$x_1=-1\,,\ x_2=-\frac{c}{a}$

۱۰۴- پاسخ گزینه‌ی ۳
$2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 16\sqrt{2}$

$$1)\ q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[7]{\frac{16\sqrt{2}}{2}}=\sqrt[7]{\frac{2^4\times 2^{\frac{1}{2}}}{2^1}}\overset{(3)}{=}\sqrt[7]{2^{\frac{7}{2}}}=\sqrt{2}$$

$$2)\ S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ \Rightarrow\ S_8=\frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}}=\frac{-30}{1-\sqrt{2}}$$

$$S_8=\frac{-30}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{-30(1+\sqrt{2})}{1-2}=30(1+\sqrt{2})$$

برای آن‌که میان ۲ عدد a و b، n عدد را به گونه‌ای درج کنیم که جملات $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ تشکیل یک تصاعد هندسی دهند، قدر نسبت تصاعد هندسی از رابطه $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ بدست می‌آید.

مجموع n جمله یک تصاعد هندسی از رابطه $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به‌دست می‌آید. n تعداد جملات تصاعد و q قدرنسبت تصاعد است.

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

۱۰۵- پاسخ گزینه‌ی ۴
معادله خط گذرا از مبدأ: $y=mx \quad , \quad y=(x+1)(x+4)$

معادله تلاقی: $mx=x^2+5x+4\ \Rightarrow\ x^2+(5-m)x+4=0$

$$\Delta\overset{(1)}{=}(5-m)^2-16=0\ \Rightarrow\ m^2-10m+9=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}m=1\\ m=9\end{cases}$$

$$m=1\ \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}}\ x^2+4x+4=0 \qquad (x+2)^2=0 \qquad \underline{x=-2}\ ✗$$

$$m=9\ \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}}\ x^2-4x+4=0 \qquad (x-2)^2=0 \qquad \underline{x=2}\ ✓$$

طبق خواست مسأله طول نقطه تماس در ناحیه اول است. پس $x=2$ قابل قبول است و مقدار $m=9$ جواب مسأله است.

برای آن‌که ۲ تابع $y=f(x)$ و $y=y(x)$ بر یکدیگر مماس باشند باید معادله تلاقی $f(x)=g(x)$ یا $h(x)=f(x)-g(x)$ ریشه مضاعف یا مرتبه بالاتر از ۲ داشته باشد بنابراین اگر معادله تلاقی از درجه ۲ باشد باید معادله ریشه‌ی مضاعف داشته‌باشد که شرط $\Delta=0$ شرایط خواسته‌شده، را تأمین می‌کند.

در معادله درجه II، $ax^2+bx+c=0$

اولاً: $\Delta=b^2-4ac$

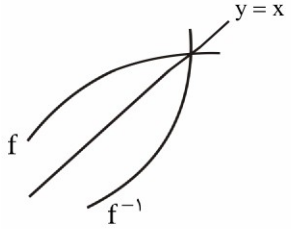
ثانیاً: اگر $a+b+c=0$ باشد ۲ ریشه x_1 و x_2 برابر هستند با: $x_1=1 \qquad x_2=\frac{c}{a}$

۱۰۶- پاسخ گزینه‌ی ۲
$f(x)=x^3-3x : x\geq 1$

نقطه تلاقی f و f^{-1} بر روی خط $y=x$ است بنابراین به‌جای حل معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ می‌توانیم معادله $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$f(x)=x\ \Rightarrow\ x^3-3x=x\ \Rightarrow\ x^3-4x=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=0\\ x^2=4\ \Rightarrow\ x=2 \text{ یا } x=-2\end{cases}$$

با توجه به فرض مسأله، $x \ge ۱$ تنها مقدار قابل‌قبول $x = ۲$ است.



اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد محل برخورد f و $f^{-۱}$ بر روی خط $y = x$ است.

۱۰۷- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\tan\left(\frac{\pi}{٤}-\alpha\right)=\frac{۱}{٥} \Rightarrow \tan ۲\alpha = ?$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{٤}-\alpha\right)\overset{(۲)}{=}\frac{\tan\frac{\pi}{٤}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{٤}\tan\alpha}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{٥} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha=\frac{۲}{۳}}$$

$$۱)\ \tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \Rightarrow \tan ۲\alpha=\frac{۲\times\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{٤}{۹}}=\frac{\frac{٤}{۳}}{\frac{٥}{۹}}=\frac{۲٤}{۱۰}=۲/٤$$

-۱ $$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}} \xrightarrow[\alpha=\beta]{} \boxed{\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}}$$

-۲ $$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}}$$

۱۰۸- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\cos x-۱}-\frac{۱}{x}\right)^{\infty-\infty}=\lim_{x\to ۰}\frac{x-\cos x+۱}{x(\cos x-۱)}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\sin x}{\underbrace{\cos x-۱}_{۰^-}-\underbrace{x\sin x}_{۰^+}}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

قاعده هوپیتال: اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}$ ، $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=۱$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$ شود حاصل $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز ۱ یا $\pm\infty$ است.

تست فوق در کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در صفحه ۱۵۹ به عنوان مثال ۵۲ حل شده است.

۱۰۹- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin^۲ x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲\sin x\cos x(۱+\sin^۲ x)}{(۱+\sin^۲ x)^۲}$$

$$f'(x)=\frac{-۲\sin x\cos x(۱+\sin^۲ x)-۲\sin x\cos x.\cos^۲ x}{(۱+\sin^۲ x)^۲}=\frac{-\sin ۲x(۱+\overbrace{\cancel{\sin^۲ x+\cos^۲ x}}^{۱})}{(۱+\sin^۲ x)^۲}$$

$$=\frac{-۲\sin^۲ x}{(۱+\sin^۲ x)^۲} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{٤}\right)=\frac{-۲}{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲}=\frac{-۲}{\frac{۹}{٤}}=-\frac{۸}{۹} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{٤}\right)=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{٤}\right)-۳f'\left(\frac{\pi}{٤}\right)=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=۳$$

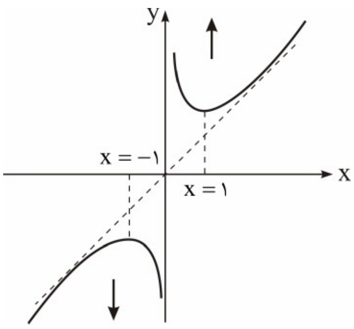
۱۱۰- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} (1)$$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x < 0 \ (2)$$

$(1)\bigcap(2) \Rightarrow$ تابع f در بازه‌ی $(-\infty , -1)$ صعودی با تقعر رو به پایین است.



راه حل دوم: باتوجه به مجانب‌های قائم $x = 0$ و مایل $y = x$ تابع و به دلیل آن‌که تابع مجانب مایل خود را قطع نمی‌کند نمودار تابع به صورت زیر است:

f اکیداً صعودی و تقعر تابع رو به پایین است $(-\infty , -1)$

۱- اگر $f'(x) > 0$ تابع اکیداً صعودی و اگر $f'(x) < 0$ تابع اکیداً نزولی است.

۲- اگر $f''(x) > 0$ تقعر یا گودی نمودار رو به بالا و اگر $f''(x) < 0$ تقعر یا گودی نمودار رو به پایین است.

۱۱۱- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\cos 5x \cos 3x = \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x \overset{(1)}{+} \cos 2x) \overset{(2)}{=} \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 8x + \cos 2x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos 8x = 1 \xrightarrow{(3)} 8x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{4}}$$

۱) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

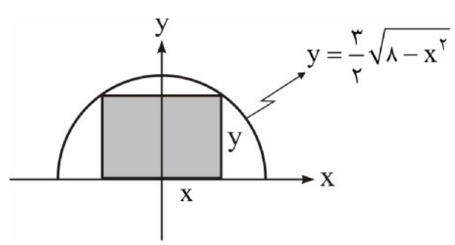
۲) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

۳) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

حالت خاص: $\begin{cases} \cos x = 1 & x = 2k\pi \\ \cos x = -1 & x = 2k\pi + \pi \\ \cos x = 0 & x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

۱۱۲- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x^2}$$



۱) $S = 2xy \quad , \quad \left(y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x^2}\right)$

۲) $S = \cancel{2}x \times \frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{8 - x^2} = 3\sqrt{8x^2 - x^4}$

۳) $S' = 0 \Rightarrow 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ ✗ \\ \underline{x = 2} \ ✓ \end{cases}$

$$٤)\ S(x=٢)=٢\times٣\sqrt{٨-٤}=١٢$$

۱۱۳- پاسخ گزینه‌ی ۳

اگر دنباله a_n همگرا به l باشد یعنی $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ دراین‌صورت:

$$\forall\varepsilon>٠\ ,\ \exists M>٠: n\geq M \ \Rightarrow\ |a_n - l|<\varepsilon$$

در مثال زیر $\varepsilon=\frac{١}{٤٠}$ و l عدد همگرایی دنباله:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{٢^n-١}{٣+٢^{n-١}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{٢^n-١}{\frac{١}{٢}\times٢^n+٣}=\frac{٢^n}{\frac{١}{٢}\times٢^n}=٢$$

بنابراین:

$$n\geq n_٠ \ \Rightarrow\ \left|\frac{٢^n-١}{٣+٢^{n-١}}-٢\right|<\frac{١}{٤٠}\ \Rightarrow\ \Rightarrow\ \left|\frac{\cancel{٢^n}-١-٢\times٣-\cancel{٢^n}}{٣+٢^{n-١}}\right|<\frac{١}{٤٠}\ \Rightarrow\ \frac{٧}{٣+٢^{n-١}}<\frac{١}{٤٠}\ \Rightarrow\ ٣+٢^{n-١}>٢٨٠$$

$$\Rightarrow\ ٢^{n-١}>٢٧٧\ \Rightarrow\ n-١\geq٩\ \Rightarrow\ \boxed{n\geq١٠}$$

$$(٢^٨=٢٥٦\ ,\ ٢^٩=٥١٢)$$

۱۱۴- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$a_n=\frac{١-٢+٣-٤+\cdots-٢n}{٢n+\sqrt{n^٢+١}}\ \Rightarrow\ \sum_{n=١}^{\infty}a_n=?$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{١-٢}^{-١}+\overbrace{٣-٤}^{-١}+\overbrace{٥-٦}^{-١}+\cdots+\overbrace{(٢n-١)-٢n}^{-١}}{٢n+\sqrt{n^٢+١}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\times-١}{٢n+|n|}=\frac{-n}{٣n}=-\frac{١}{٣}$$

پس در سری $\sum_{n=١}^{\infty}a_n$ حاصل $\lim_{n\to+\infty}a_n=-\frac{١}{٣}$ است یعنی شرط لازم همگرایی سری برقرار نیست پس سری واگرا است.

شرط لازم برای آن‌که $\sum_{n=١}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، آن است که $\lim_{n\to+\infty}a_n=٠$ بنابراین:

$\lim_{n\to+\infty}a_n\neq٠\ \Rightarrow$ واگرا است Σa_x

۱۱۵- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x\to١}\frac{\sin\pi x}{١-x}\overset{H}{=}\lim_{x\to١}\frac{\pi\cos\pi x}{-١}=\frac{-\pi}{-١}=\pi\ \Rightarrow\ \boxed{a=\pi}$$

۱۱۶- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$(a+٢)x^٢-٧x+٤=a$$

$$f(x)=(a+٢)x^٢-٧x+٤-a \qquad f(١)\times f(-١)<٠$$

$$\Rightarrow\ (\cancel{a}+٢-٧+٤-\cancel{a})(\cancel{a}+٢+٧+٤-\cancel{a})<٠\ \Rightarrow\ -١\times١٣<٠$$

بنابراین به ازای تمام مقادیر a، $f(١)\times f(-١)<٠$ است.

۱۱۷- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$f(x)=-x+\sqrt[٣]{x^٣-x^٢}$$

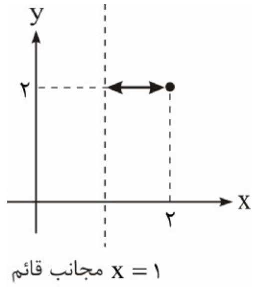
$$f(x)=٠\ \Rightarrow\ \sqrt[٣]{x^٣-x^٢}=x\ \Rightarrow\ \cancel{x^٣}-x^٢=\cancel{x^٣}\ \Rightarrow\ \underline{x=٠}$$

بنابراین تابع تنها در یک نقطه $x=٠$ با محور xها تماس دارد و چون تابع پیوسته است به ازای تمام مقادیر x، تابع یا منفی و یا مثبت است. مثلاً مقدار تابع در $x=١$ برابر -١ است پس تابع همواره زیر محور xها است و مقدار تابع در $x=٠$ که برابر صفر است max مطلق تابع است.

۱۱۸- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\frac{۲x^۲-۳x}{(x-۱)^۲}=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-۲x+۱}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=۲ \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-۲x+۱}=۲ \Rightarrow ۲x^۲-۳x=۲x^۲-٤x+۲ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow A\Big|_{۲}^{۲}$$



فاصله نقطه برخورد از مجانب قائم برابر ۱ واحد است $\Rightarrow$ $\lim_{x\to۱} f(x)=\infty$ مجانب قائم $x=۱$

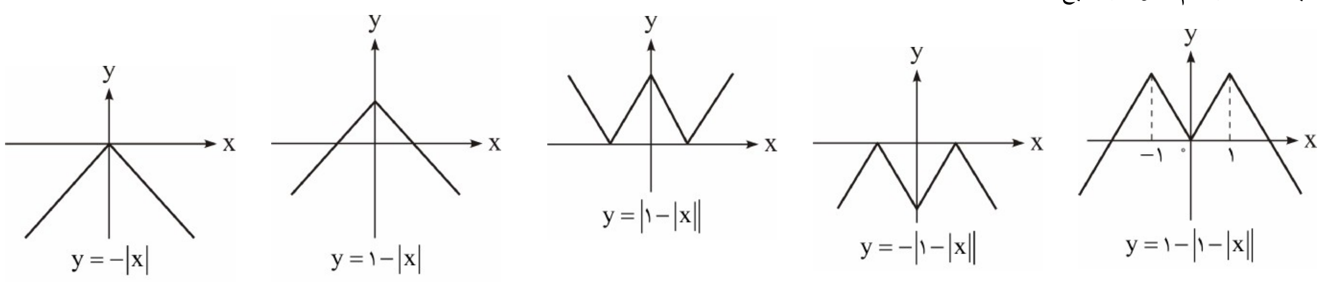
اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ ، $y=b$ را مجانب افقی تابع می‌نامیم.

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ، $x=a$ را مجانب قائم تابع می‌نامیم.

۱۱۹- پاسخ گزینه‌ی ۳ ابتدا ضابطه تابع مرکب را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=۱-|x| \qquad fof(x)=f\big(f(x)\big)=۱-|f(x)|=۱-\big|۱-|x|\big|$$

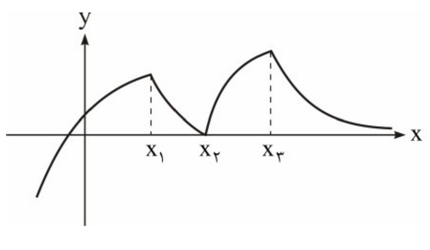
به کمک رسم نمودار تابع:



بنابراین تابع در ۳ نقطه $x=۰$ و $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق ناپذیر است.

روش دوم: با توجه به ضابطه تابع: $y=fof(x)=۱-\big|۱-|x|\big|$

$|x|$ در $x=۰$ و $|x|-۱$ در $|x|=۱$ یعنی $x=\pm۱$ مشتق ناپذیر است.



۱- نقاط شکست (یا نقاط تیز) تابع جزء نقاط پیوسته و مشتق ناپذیر تابع هستند. به عنوان مثال اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد؛ تابع در ۳ نقطه $x_۱$, $x_۲$, $x_۳$ مشتق ناپذیر است.

۲- اگر تابع $y=f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق پذیر باشد. ریشه‌های ساده درون قدر مطلق جزء نقاط مشتق ناپذیر و زاویه‌دار تابع هستند. مثلاً تابع $y=|x|$ در $x=۰$، تابع $y=|x-۱|$ در $x=۱$ یا تابع $y=\left|(x-۲)x^۳\right|$ در $x=۲$ مشتق ناپذیر هستند.

۱۲۰- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$f(x)=x\left|x^2-3\right|=\begin{cases}-x(x^2-3) & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ x(x^2-3) & x\ge\sqrt{3}\cup x\le-\sqrt{3}\end{cases}=\begin{cases}3x-x^3\\ x^3-3x\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}3-3x^2 & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 3x^2-3 & x>\sqrt{3}\cup x<-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \qquad 3-3x^2=0 \qquad x=\pm1\in(-\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$$

نقاط بحرانی: $x=\pm1$ (ریشه‌های مشتق تابع) و $x=\pm\sqrt{3}$ (نقاط مرزی ۲ ضابطه و نقاط مشتق ناپذیر تابع)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

تابع دارای ٤ نقطه Ext نسبی (شامل ۲ نقطه min و ۲ نقطه max نسبی) است.

برای تعیین نقاط Ext در هر تابع پیوسته مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم. نقاط بحرانی تابع نقاطی در دامنه تابع هستند که مشتق در آن نقاط برابر صفر و یا مشتق تابع وجود ندارد.

۲- مشتق تابع را در ۲ طرف نقاط بحرانی تعیین علامت می‌کنیم. اگر مشتق تابع در ۲ طرف این نقاط تغییر علامت دهد، این نقاط به عنوان نقاط Ext (max یا min) محسوب می‌گردند.

۱۲۱- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\Delta f=f(3.1)-f(3)\cong\Delta x f'(3)=$$

$$\begin{cases}x_1=3\,,\ x_2=3.1\ \Rightarrow\ \Delta x=\dfrac{1}{10}\\[2ex] f'(x)=\dfrac{U'}{1+U^2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{x^2}{16}}\ \Rightarrow\ f'(3)=\dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{25}{16}}=\dfrac{4}{25}\end{cases}$$

$$\Delta f=f(3.1)-f(3)\cong\Delta x f'(3)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{25}=\frac{1}{10}\times\frac{16}{100}=0.016$$

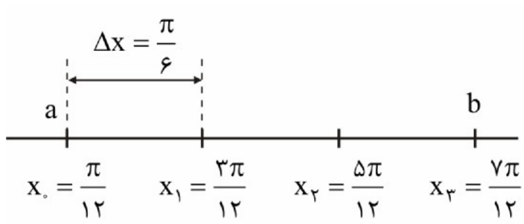
مقدار تقریبی نمودار تابع یعنی $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$ را می‌توانیم از رابطه زیر به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}f(x_2)-f(x_1)\cong\Delta\pi\times f'(x_1)\\ \Delta x=x_2-x_1\end{cases}$$

۱۲۲- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\sin^2 x \qquad \left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right] \qquad n=3\,,\ U_i=\frac{1}{2}(x_i+x_{i-1})$$

با توجه به تعریف مجموعه ریمان: $U_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x f(U_i)$ و تعریف Δx: $\Delta x=\dfrac{b-a}{x}$، در این مسأله:



$$\Delta x = \frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_0) = \frac{\pi}{6} \\ U_2 = \frac{1}{2}(x_2+x_1) = \frac{\pi}{3} \\ U_3 = \frac{1}{2}(x_3+x_2) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_3(f) = \sum_{i=1}^{3} \Delta x f(U_i) = \Delta x\left(f(U_1)+f(U_2)+f(U_3)\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \overset{f(x)=\sin^2 x}{=\!=\!=} \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right) = \frac{\pi}{3}$$

۱۲۳- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x\,dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 4x + \sin 2x)dx \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 4x + \cos 2x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\overset{(3)}{=} -\frac{1}{4}\left(\overset{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\cos x + \cos \cancel{\frac{\pi}{2}}\right)} - \left(\underbrace{\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0}_{\frac{3}{2}}\right)\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

۱) $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

۲) $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

۳) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$

۱۲۴- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$F(x) = \int \frac{x^3+x+2}{1+x^2}dx \qquad F(0)=0 \qquad F(1)=?$$

$$F(x) = \int \frac{x(x^2+1)+2}{x^2+1}dx = \int\left(x+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2\operatorname{Arctan} x + c$$

$$\Rightarrow F(0) = c \underset{\text{فرض}}{\overset{\text{طبق}}{=}} 0 \Rightarrow \boxed{c=0} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\operatorname{Arctan} x}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} + 2\operatorname{Arctan} 1 = \frac{1}{2} + 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(1+\pi)$$

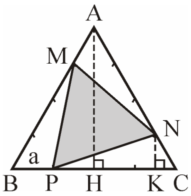
۱۲۵- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$AEMN: \hat{A} + \hat{M}_2 + \hat{N}_1 + \hat{E}_1 = 360^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{M}_2 + (180^\circ - \hat{N}_2) + (180^\circ - \hat{E}_2) = 360^\circ \\ \hat{N}_2 = \hat{M}_1 \ , \ \hat{E}_2 = \hat{M}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{M}_2 - (\overbrace{\hat{M}_1 + \hat{M}_3}^{180^\circ - \hat{M}_2}) = 0$$

$$\xrightarrow{\hat{A}=106^\circ} 2\hat{M}_2 = 74^\circ \Rightarrow \hat{M}_2 = 37$$

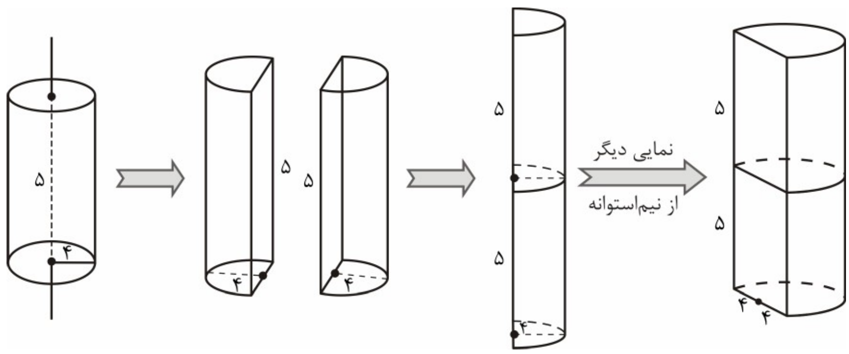
۱۲۶- پاسخ گزینه‌ی ۳ ارتفاع‌های مثلث‌های ABC و PCN را رسم می‌کنیم. همان تقسیم‌بندی که روی ساق‌ها اِعمال شده است روی ارتفاع‌ها نیز انجام می‌شود (طبق قضیه‌ی تالس). داریم:



$$\frac{NK}{AH}=\frac{CN}{CA}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{AH=h} NK=\frac{h}{۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۳S_{\overset{\Delta}{PNC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times h\times ۴a-۳\times\frac{۱}{۲}\times\frac{h}{۴}\times ۳a}{\frac{۱}{۲}\times h\times ۴a}=\frac{۷}{۱۶}$$

۱۲۷- پاسخ گزینه‌ی ۴

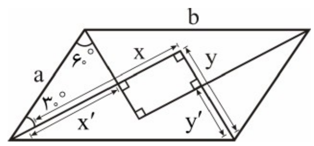


سطح کل استوانه = محیط قاعده × ارتفاع + مساحت دو قاعده $= ۲\pi rh+۲\pi r^{۲}$

سطح کل نیم‌استوانه $=\pi rh+\pi r^{۲}$ + سطح مقطع مستطیل شکل با طول ۱۰ و عرض ۸

سطح کل نیم‌استوانه $=\pi\times ۴\times ۱۰+\pi\times ۱۶+۸\times ۱۰=۵۶\pi+۸۰$

۱۲۸- پاسخ گزینه‌ی ۲ اگر متوازی‌الاضلاعی که نیم‌سازهای درونیش را رسم می‌کنیم، یک زاویه‌ی ۶۰° (یا ۱۲۰°) داشته‌باشد، می‌توان اضلاع مستطیل را برحسب اضلاع متوازی‌الاضلاع به‌راحتی محاسبه کرد:



$$x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}b\ ,\ x'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\ ,\ y=\frac{b}{۲}\ ,\ y'=\frac{a}{۲}$$

طول مستطیل $=x-x'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(b-a)$

عرض مستطیل $=y-y'=\frac{۱}{۲}(b-a)$

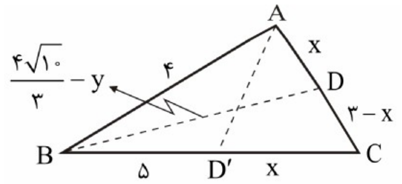
$S_{\text{مستطیل}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(b-a)^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۱۶=۴\sqrt{۳}$

۱۲۹- پاسخ گزینه‌ی ۳ محیط > مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث از سه رأس > نصف محیط

$\frac{۳+(۳-\sqrt{۲})+(۲+\sqrt{۲})}{۲}<$ مجموع فواصل $<۳+(۳-\sqrt{۲})+(۲+\sqrt{۲})$

$\Rightarrow$ ۴ > مجموع فواصل > ۸ $\Rightarrow$ فقط گزینه‌ی ۳ قابل قبول است.

۱۳۰- پاسخ گزینه‌ی ۳ از آن‌جاکه بزرگ‌ترین نیم‌ساز به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود، پس به‌دنبال اندازه‌ی BO هستیم، زیرا BD بزرگ‌ترین نیم‌ساز است و فاصله‌ی محل تلاقی نیم‌سازها از رأس B نیز بیش‌ترین فاصله تا رئوس خواهدبود. بدین‌منظور با استفاده از قضیه‌ی نیم‌ساز در $\overset{\Delta}{ABC}$ ابتدا x را می‌یابیم و سپس مجدداً با استفاده از قضیه‌ی نیم‌ساز در $\overset{\Delta}{ABD}$، y را می‌یابیم:



$\overset{\Delta}{ABC}$: نیم‌ساز BD $\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{x}{۳-x} \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$

$\overset{\Delta}{ABD}$: قضیه‌ی فیثاغورس : $BD=\sqrt{AB^۲+AD^۲}=\sqrt{۱۶+\frac{۱۶}{۹}}=\sqrt{\frac{۱۶۰}{۹}}=\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۳}$

$\overset{\Delta}{ABD}$: نیم‌ساز AO $\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{۴}{\frac{۴}{۳}}=\frac{y}{\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۳}-y} \Rightarrow y=\sqrt{۱۰}$

۱۳۱- پاسخ گزینه‌ی ۲ نقطه‌ای از خط $x-۲y=٤$ مثل $A=(٤\,,\,۰)$ را انتخاب می‌کنیم، سپس آن را نسبت به نقطه‌ی $(۲\,,\,a)$ بازتاب می‌کنیم، نقطه‌ی $A'=(۰\,,\,۲a)$ به‌دست می‌آید. حال باید مختصات نقطه‌ی A' در خط $x-۲y+٦=۰$ صدق کند. داریم:

$$۰-۲(۲a)+٦=۰ \Rightarrow -٤a=-٦ \Rightarrow \boxed{a=\frac{۳}{۲}}$$

۱۳۲- پاسخ گزینه‌ی ۴ در فضا، مکان هندسی نقاطی که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله هستند محل برخورد سه صفحه‌ی عمودمنصفِ نظیر سه ضلع مثلث است که این صفحات یک‌دیگر را در یک خطِ عمودِ بر صفحه‌ی مثلث و گذرنده از محل همرس عمودمنصف‌های اضلاع قطع می‌کنند. یعنی مکان هندسی مزبور یک خط است نه صفحه. و از آن‌جایی‌که در صورت تست، تعداد صفحه از ما خواسته شده‌است، پاسخ نشدنی است.

۱۳۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

$\vec{a}=(۱\,,\,-۳\,,\,۲)$

$\vec{b}=(۱\,,\,۲\,,\,۰)$

$\vec{a}''=۲\vec{a}'-\vec{a}\overset{(۱)}{=}۲(-۱\,,\,-۲\,,\,۰)-(۱\,,\,-۳\,,\,۲)=(-۳\,,\,-۱\,,\,-۲)$

$۲\vec{a}'=\frac{\vec{a}'.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\vec{b}=-\frac{۵}{۵}(۱\,,\,۲\,,\,۰)=(-۱\,,\,-۲\,,\,۰) \qquad (۱)$

۱۳۴- پاسخ گزینه‌ی ۳ ابتدا بردارهای هادی هر کدام از خط‌ها را به‌دست می‌آوریم تا پس از پی‌بردن به اوضاع نسبی دو خط، روش حل مناسب را درپیش بگیریم (زیرا بسته به این‌که D و D' موازی باشند یا متنافر، روش حل و رابطه‌ی مربوطه متفاوت خواهدبود.)

$$\left.\begin{array}{l} D:\begin{cases} x+y=۲ \\ x-z=٤ \end{cases} \xrightarrow[\text{می‌نویسیم}]{\text{ساده‌تر}} x=۲-y=z+٤ \Rightarrow U_D=(۱\,,\,-۱\,,\,۱) \\ D':\frac{x-۲}{۱}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۱} \Rightarrow U_{D'}=(۱\,,\,-۱\,,\,۱) \end{array}\right\} \Rightarrow U_D \parallel U_{D'}$$

$\Rightarrow$ کوتاه‌ترین فاصله‌ی دو خط موازی $d=\frac{|\overrightarrow{AA'}\times\vec{U}|}{|\vec{U}|}$

$$\left.\begin{array}{l} D \text{ نقطه‌ای از } A=(۰\,,\,۲\,,\,-٤) \\ D' \text{ نقطه‌ای از } A'=(۲\,,\,۰\,,\,۱) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=(۲\,,\,-۲\,,\,۵)$$

$\overrightarrow{AA'}\times\vec{U}=(۳\,,\,۳\,,\,۰) \Rightarrow d=\frac{|(۳\,,\,۳\,,\,۰)|}{|(۱\,,\,-۱\,,\,۱)|}=\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{٦}$

۱۳۵- پاسخ گزینه‌ی ٤ ابتدا نقاط برخورد صفحه‌ی مزبور با هر سه محور مختصات را به‌دست می‌آوریم و سپس از دستور ضرب خارجی برای محاسبه‌ی مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ استفاده می‌نماییم.

نقطه‌ی تلاقی صفحه با xها $A \xrightarrow[x+2y-2z=4]{y=z=0} x=4 \Rightarrow A=(4,0,0)$

نقطه‌ی تلاقی صفحه با yها $B \xrightarrow{x=z=0} B=(0,2,0)$

نقطه‌ی تلاقی صفحه با zها $C \xrightarrow{x=y=0} C=(0,0,-2)$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(-4,2,0)\times(-4,0,-2)\right|=\frac{1}{2}\left|(-4,-8,8)\right|$$

۱۳۶- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$3x^2+4y-6x+11=0 \xrightarrow{\text{مربع کامل}} \begin{cases}(x-1)^2=-\frac{4}{3}(y+2)\\(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S=(\alpha,\beta)=(1,-2)\\a=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Delta: y=-a+\beta=\frac{1}{3}+(-2)=-\frac{5}{3}$$

۱۳۷- پاسخ گزینه‌ی ۲ $A-A^T$ ماتریس پادمتقارن است، زیرا:

$$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$$

پس درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $\begin{pmatrix}0 & 3\\ a & b\end{pmatrix}$ باید صفر باشد. یعنی: $\boxed{b=0}$ و درایه‌های قطر فرعی نیز باید قرینه‌ی یک‌دیگر باشند. یعنی: $\boxed{a=-3}$

۱۳۸- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\begin{vmatrix}a+3 & b & c\\ 3 & b+2 & c+2\\ a & b & c+1\end{vmatrix}=3+\begin{vmatrix}a+3 & b & c\\ 3 & b+2 & c\\ a & b & c+1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a+3 & b & c\\ 3 & b+2 & c\\ a & b & c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+3 & b & 0\\ 3 & b+2 & 2\\ a & b & 0\end{vmatrix}=3+\begin{vmatrix}a+3 & b & c\\ 3 & b+2 & c\\ a & b & c+1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a+3 & b & 0\\ 3 & b+2 & 2\\ a & b & 0\end{vmatrix}=3 \xrightarrow[\text{ساروس}]{\text{استفاده از دستور}} -6b=3 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$b=-\frac{1}{2}$ و هرچه باشد a (زیرا در طی محاسبه‌ی دترمینان مقدار a حذف شده‌است. یعنی به a وابسته نیست.)

۱۳۹- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}.A.\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

ابتدا B^{-1} را محاسبه و از چپ در طرفین تساوی ضرب می‌کنیم و سپس C^{-1} را محاسبه و از راست در تساوی ضرب می‌کنیم تا ماتریس A تنها و معادله حل شود:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}b_4 & -b_2\\ -b_3 & b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$C^{-۱} = -۱ \times \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۵ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$(B^{-۱}(B.A.C))C^{-۱} = A = \left(\overbrace{\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۳ & -۸ \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۱ & ۱۹ \\ - & - \end{bmatrix}$$

۱۴۰- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۳ & -٤ & ۵ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

رَدِ گزینه‌های ۳ و ۴: اگر سطرهای اول و دوم ماتریس ضرایب که درواقع همان نرمال‌های دو صفحه از سه صفحه‌اند را درهم ضرب نقطه‌ای کنیم، پاسخ غیرصفر $(N_۱.N_۲ \neq ۰)$ می‌شود، پس قطعاً صفحات عمود برهم نیستند. حال از آن‌جاکه دترمینان ماتریس ضرایب صفر می‌شود $|A| = ۰$ و دستگاه ناهمگن است پس یا بی‌شمار جواب داریم یا هیچ جوابی نداریم. (که تشخیص حالت درست از بین این دو انتخاب در فضای $R^۳$ به‌راحتی امکان‌پذیر نیست. زیرا سه صفحه یا منطبق بوده‌اند یا موازی و یا یکدیگر را در یک خط قطع کرده‌اند که با توجه به موازی نبودن نرمال‌ها، این سه صفحه موازی یا منطبق نبوده‌اند پس متقاطع هستند.) پس بهتر است این دستگاه سه مجهولی را به یک دستگاه ۲ معادله، ۲ مجهول تبدیل کنیم و از روش‌های بحث روی تعداد جواب‌های دستگاه ۲ معادله، ۲ مجهول که آسان‌تر هستند، به تشخیص اوضاع نسبی صفحات بپردازیم.

$$\begin{cases} x + ۲y - z = ٤ \;\Rightarrow\; x = ٤ + z - ۲y \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله‌های (۲) و (۳)}} \begin{cases} d_۱ : ۵y - ٤z = ۵ \\ d_۲ : ۱۰y - ۸z = ۱۰ \end{cases} \\ ۲x - y + ۲z = ۳ \\ ۳x - ٤y + ۵z = ۲ \end{cases}$$

این دو خط برهم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار ریشه دارد و این بدان معنا است که این سه صفحه یک‌دیگر را در یک خط $(d_۱)$ قطع کرده‌اند.

۱۴۱- پاسخ گزینه‌ی ۳ می‌دانیم ضریب تغییرات برابر است با: $C_v = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

ابتدا $\bar{x}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{٤۸}{۸} = ٦ \;,\; \frac{۱}{۲} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \;\Rightarrow\; \frac{۱}{۲} = \frac{\sigma}{٦} \;\Rightarrow\; \sigma = ۳$$

از طرفی:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})}{n}} \;\Rightarrow\; ۳ = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{۸} (x_i - ٦)^۲}{۸}} \;\Rightarrow\; ۹ = \frac{\sum_{i=۱}^{۸} (x_i - ٦)^۲}{۸} \;\Rightarrow\; \sum_{i=۱}^{۸} (x_i - ٦)^۲ = ۷۲$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=۱}^{۸} (x_i^۲ - ۱۲x_i + ۳٦) = ۷۲ \;\Rightarrow\; \sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲ - ۱۲\sum_{i=۱}^{۸} x_i + \sum_{i=۱}^{۸} ۳٦ = ۷۲ \;\Rightarrow\; \sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲ - ۱۲ \times ٤۸ + ۸ \times ۳٦ = ۷۲$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲ - ۵۷٦ + ۲۸۸ = ۷۲ \;\Rightarrow\; \sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲ = ۳٦۰$$

۱۴۲- پاسخ گزینه‌ی ۲ اختلاف درصدهای فراوانی دو دسته برابر $۱۲ = ۵۵ - ٦۷$ است. بنابراین: $\dfrac{۱۲}{۱۰۰} = \dfrac{x}{۷۵} \;\Rightarrow\; x = ۹$

۱۴۳- پاسخ گزینه‌ی ۴ ابتدا سؤال را پاسخ می‌دهیم بعد کمی صحبت می کنیم که چه‌گونه می‌توان به‌جواب نزدیک شد.

۱) $۴۰=۶+۷+۸+۹+۱۰$

۲) $۴۶=۱۰+۱۱+۱۲+۱۳$

۳) $۵۶=۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱$

خب! اما چه‌طور می‌شود فهمید چه عددهایی را می‌شود به‌صورت جمع دو چند عدد متوالی نوشت:

الف) جمع دو عدد متوالی:

دو عدد متوالی را می‌توان به‌صورت $x+۱$ و x درنظر گرفت، بنابراین:

$x+x+۱=۲x+۱$

پس اگر عدد فرد باشد، می‌توان آن را به‌صورت جمع اعداد متوالی نوشت. در میان گزینه‌ها، عدد فرد نیست.

ب) جمع سه عدد متوالی:

سه عدد را به‌صورت $x-۱$ و x و $x+۱$ می‌نویسیم که جمع آن‌ها می‌شود $۳x$ یعنی اگر عددی مضرب ۳ باشد، می‌توان آن را به‌صورت جمع سه عدد متوالی نوشت. در میان گزینه‌ها عددی مضرب ۳ نیست.

پ) جمع ۴ عدد متوالی:

چهار عدد را به‌صورت $x+۲$ و $x+۱$ و x و $x-۱$ درنظر می‌گیریم. جمع این اعداد می‌شود $۴x+۲$ یعنی اعدادی که در تقسیم به ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند. در میان گزینه‌ها عدد ۴۶ چنین خاصیتی دارد.

ت) جمع ۵ عدد متوالی:

پنج عدد را به‌صورت $x+۲$ و $x+۱$ و x و $x-۱$ و $x-۲$ درنظر می‌گیریم که مجموع آن می‌شود $۵x$. یعنی اگر عددی مضرب ۵ بود، آن را می‌توان به‌صورت جمع پنج عدد متوالی نوشت. عدد ۴۰ چنین خاصیتی دارد.

ث) جمع ۶ عدد متوالی

شش عدد را به‌صورت $x+۳$ و $x+۲$ و $x+۱$ و x و $x-۱$ و $x-۲$ می‌نویسیم که جمع آن‌ها می‌شود $۶x+۳$ یعنی اعدادی را که در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارند، می‌توان به‌صورت ۶ عدد متوالی نوشت. چنین عددی در گزینه‌ها وجود ندارد.

ج) جمع ۷ عدد متوالی

هفت عدد را می‌توان به‌صورت $x+۳$ و $x+۲$ و $x+۱$ و x و $x-۱$ و $x-۲$ و $x-۳$ نوشت که مجموع آن می‌شود $۷x$ که در میان گزینه‌ها ۵۶ مضرب ۷ است و در نتیجه می‌توان آن را به‌صورت ۷ عدد متوالی نوشت.

اما ۶۴ را به‌هیچ طریقی نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. علت را توضیح می‌دهم. یک‌بار دیگر به مجموع اعداد متوالی نگاه کنید:

$۴x+۲$: چهار عدد متوالی	$۳x$: سه عدد متوالی	$۲x+۱$: دو عدد متوالی
$۷x$: هفت عدد متوالی	$۶x+۳$: شش عدد متوالی	$۵x$: پنج عدد متوالی

به‌طورکلی می‌توان ثابت کرد مجموع k عدد متوالی اگر k فرد باشد مضرب k است واگر k زوج باشد $(k=۲q)$ به‌صورت $۲qx+q$ است. داریم: $۲qx+q=q(۲x+۱)$

بنابراین یکی از عوامل حاصل‌جمع k عدد متوالی حتمن فرد است. پس توان‌های ۲ مثل ۲، ٤، ۸، ١٦، ۳۲، ٦٤ و ... را نمی‌توان به‌صورت جمع اعداد متوالی نوشت.

۱۴۴- پاسخ گزینه‌ی ۴ در تقسیم به ١٦ چند مدل باقی‌مانده داریم؟ بله! ١٦ مدل، اعداد که بر ١٦ بخش‌پذیرند، اعدادی که بر ١٦ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند، اعدادی که بر ١٦ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند و ... اعدادی که بر ١٦ باقی‌مانده‌ای برابر ۱۵ دارند. به‌عبارت دیگر هر عددی در تقسیم به ١٦ در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد. اگر یک زیرمجموعه‌ی ۵۰ عضوی از اعداد طبیعی را درنظر بگیریم، باتوجه به این که:

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ١٦ \\ \cline{2-2} \underline{٤۸} & ۳ \\ ۲ & \end{array}$$

به این معنی است که حتماً اگر در بدترین حالت ۳ عدد بر ١٦ بخش‌پذیر باشد، ۳ عدد بر ١٦ باقی‌مانده‌ی ۱ داشته‌باشند، سه عدد باقی‌مانده‌ی ۲ و ... بالاخره ۳ عدد باقی‌مانده‌ی ۱۵ داشته‌باشند، یعنی از هر کدام از دسته‌ها ۳ عضو در مجموعه باشند، باز ۲ عضو دیگر باقی‌می‌ماند که لااقل یکی از دسته‌ها را چهارتایی می‌کند؛ یعنی: «**دست‌کم چهار عضو هم باقی‌مانده به ۱۶ می‌توان پیدا کرد.**»

۱۴۵- پاسخ گزینه‌ی ۳ ابتدا مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} A_{۳}=\left\{m\in Z\,|\,m\geq -۳\ ,\ ۲^{m}\leq ۳\right\} \Rightarrow A_{۳}=\left\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\right\} \\ A_{٤}=\left\{m\in Z\,|\,m\geq -٤\ ,\ ۲^{m}\leq ٤\right\} \Rightarrow A_{٤}=\left\{-٤,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{۳}\cap A_{٤}=\left\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\right\}$$

در نتیجه $A_{۳}\cap A_{٤}$ دارای ۳۲ زیرمجموعه است.

۱۴۶- پاسخ گزینه‌ی ۱ ابتدا خود $(B-A)'-A$ را پیدا می‌کنیم، بعد متمم می‌گیریم:

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'-A=(B'\cup A)'\cap A'=(B'\cap A')\cup(A\cap A')=(B'\cap A')\cup\varnothing=B'\cap A'$$

حالا متمم این مجموعه را پیدا می‌کنیم:

$$(B'\cap A')'=B\cup A$$

۱۴۷- پاسخ گزینه‌ی ۲ ابتدا احتمال قبول‌شدن یک نفر را حساب می‌کنیم.

P(قبول‌شدن) = P(از کلاس A باشد)P(قبول شود | از کلاس A باشد) + P(از کلاس B باشد)P(قبول شود | از کلاس B باشد)

فرض کنید داوطلبین کلاس B برابر x نفر باشد، بنابراین تعداد داوطلبین کلاس A برابر $۲x$ نفر می‌شود. داریم:

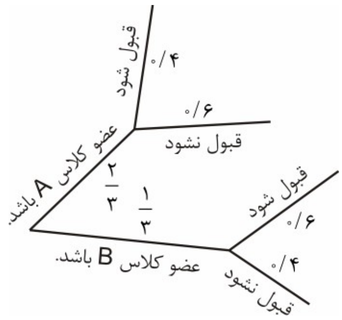
$$P(\text{قبول‌شدن})=\frac{۲x}{۳x}\times\frac{٤۰}{۱۰۰}+\frac{x}{۳x}\times\frac{٦۰}{۱۰۰}=\frac{۱٤}{۳۰}$$

حال با توجه به این‌که می‌دانیم فرد انتخاب شد، قبول شده‌است، احتمال آن‌که از کلاس A باشد را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{از کلاس A باشد | قبول شود})=\frac{P(\text{از کلاس A باشد})P(\text{قبول شود | از کلاس A باشد})}{P(\text{قبول شدن})}$$

$$P(\text{از کلاس A باشد | قبول شود})=\frac{\frac{۲x}{۳x}\times\frac{٤۰}{۱۰۰}}{\frac{۱٤}{۳۰}}=\frac{\frac{۸}{۳۰}}{\frac{۱٤}{۳۰}}=\frac{٤}{۷}=۵۷\ \%$$

راه دوم: آدمی که قبول شده یا «از کلاس A است و قبول‌شده» و یا «از کلاس b است و قبول‌شده» پس ما باید سهم قبول‌شدگان کلاس A را به کل قبول‌شدگان حساب کنیم. یعنی شاخه‌ی قبول‌شدگان A به کل شاخه‌های قبول‌شدگان:

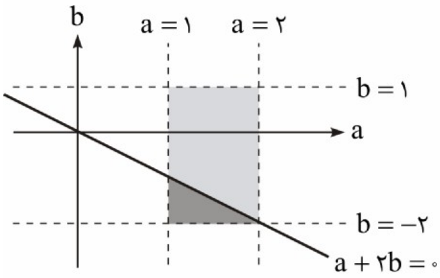


$$\Rightarrow \frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{٤}{۱۰}}{\frac{۲}{۳}\times\frac{٤}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{٦}{۱۰}}=\frac{۸}{۱٤}=۰/۵۷$$

۱۴۸- پاسخ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم جواب معادله‌ی $ax+b=۰$ برابر است با $x=-\frac{b}{a}$ اگر بخواهیم جواب کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد یعنی $-\frac{b}{a}<\frac{۱}{۲}$. با توجه به این‌که $a\in[۱,۲]$ پس a عددی مثبت است. داریم:

$$-\frac{b}{a}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲b<a \Rightarrow a+۲b>۰$$

a و b را هر کدام در محورهای جداگانه درنظر می‌گیریم، فضای نمونه‌ای را پیدا می‌کنیم و بررسی می‌کنیم در چه قسمت‌هایی از این فضای نمونه‌ای $a+۲b>۰$ است. داریم: $S=۲\times۱=۲$



فضای نمونه‌ای مساحت قسمت سایه‌خورده است.

پیش‌آمد مورد نظر قسمت‌هایی از این مستطیل است که در آن $a+۲b>۰$ خط $a+۲b=۰$ را رسم می‌کنیم.

برای به‌دست‌آوردن پیش‌آمد موردنظر مساحت مثلث به‌وجودآمده در پایین خط $a+۲b=۰$ (قسمت سایه‌خورده‌ی تیره) را از کل فضای نمونه‌ای کم می‌کنیم:

$$\text{مساحت پیش‌آمد موردنظر}=۲-\frac{۱}{۲}\times۱\times\frac{۱}{۲}=۲-\frac{۱}{٤}=\frac{۷}{٤} \Rightarrow P=\frac{\frac{۷}{٤}}{۲}=\frac{۷}{۸}$$

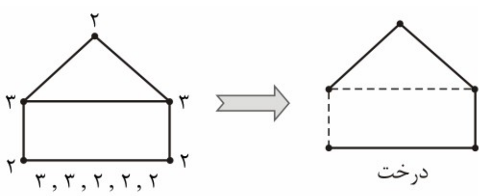
۱۴۹- پاسخ گزینه‌ی ۲ وقتی گفته‌می‌شود حاصل‌ضرب درایه‌های قطر $A^۲$ برابر ۷۲ است، با توجه به این‌که درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ همان درجه‌های رئوس هستند، یعنی حاصل‌ضرب درجات رئوس ماتریس برابر ۷۲ است. یعنی ۵ عدد کم‌تر از ۵ را درهم ضرب کردیم و برابر ۷۲ شده‌است. داریم:

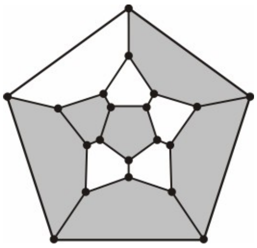
$$۷۲=۲^۳\times۳^۲ \Rightarrow S:۳,۳,۲,۲,۲$$

(دقت کنید حالت $S:٤,۳,۳,۲,۱$ امکان‌پذیر نیست چون تعداد رئوس فرد، فرد است.)

$$\Rightarrow ۲q=۳+۳+۲+۲+۲=۱۲ \Rightarrow q=٦$$

گراف ۵ رأس دارد می‌دانیم در هر درخت $q=p-۱$؛ بنابراین درختی با ۵ رأس دارای ٤ یال است. پس از گراف موردنظر باید ۲ یال برداریم تا تبدیل به درخت شود. مثلاً:





۱۵۰- پاسخ گزینه‌ی ۳ خب این شکل در تمرین‌های کتاب درسی گسسته آمده و گراف همیلتنی است، یعنی دوری به طول ۲۰ دارد. به شکل دقت کنید:

۱۵۱- پاسخ گزینه‌ی ۲ عدد مضرب ٤٤ است، یعنی هم مضرب ٤ است هم مضرب ۱۱:

$$\overline{a۷۰b} = ۱۰۰۰a + ۷۰ + b$$

$$a۷۰b \overset{٤}{\equiv} ۰ \Rightarrow b \overset{٤}{\equiv} ۰ \Rightarrow b = \begin{cases} ۰ \\ ٤ \\ ۸ \end{cases}$$

اما $b \neq ۰$ است زیرا اگر $b = ۰$ باشد عدد بر ۵ نیز بخش‌پذیر می‌شود و در نتیجه مضرب ۵۵ می‌شود. پس ۸ یا $b = ٤$. از طرفی:

$$a۷.b \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow b - ۰ + ۷ - a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ + b$$

$b = ٤ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۰ \Rightarrow$ چون عدد چهاررقمی نمی‌شود. (غ.ق.ق)

$b = ۸ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} ٤ \Rightarrow$ پس $a = ٤$ و $b = ۸$ است و در نتیجه $a + b = ۱۲$ است.

۱۵۲- پاسخ گزینه‌ی ۱ ب. م. م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(۵n - ۲\ ,\ ۱۲n + ۷) = d$$

$$d \mid ۵n - ۲ \xrightarrow{\times ۱۲} d \mid ۶۰n - ۲٤ \overset{(-)}{\Rightarrow} d \mid ۵۹$$

$$d \mid ۱۲n + ۷ \xrightarrow{\times ۵} d \mid ۶۰n + ۳۵ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۵۹$$

چون دو عدد نسبت به هم اول نیستند پس ب. م. مشان برابر ۵۹ است.

۱۵۳- پاسخ گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $A \ll B$ پس هر درایه از ماتریس A باید کوچک‌تر مساوی درایه‌ی نظیرش در ماتریس B باشند. داریم:

$$A \ll B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} ۱ & \text{۰ یا ۱} & ۱ & \text{۰ یا ۱} \\ \text{۰ یا ۱} & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & \text{۰ یا ۱} & \text{۰ یا ۱} & ۱ \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم بعضی از درایه‌های B متن باید ۱ باشند، اما بعضی درایه‌های دو حالت دارند یعنی می‌توانند ۰ یا ۱ باشند. پس:

$$\begin{bmatrix} \boxed{۱} & \boxed{۲} & \boxed{۱} & \boxed{۲} \\ \boxed{۲} & \boxed{۱} & \boxed{۱} & \boxed{۱} \\ \boxed{۱} & \boxed{۲} & \boxed{۲} & \boxed{۱} \end{bmatrix} = ۲^۵ = ۳۲$$

۱۵۴- پاسخ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای، انتخاب ۲ مهره از میان ۶ مهره است. پس:

$$n(s) = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

پیش‌آمد موردنظر حالت‌هایی هست که مجموع دو عدد نوشته‌شده روی مهره‌ها مضرب ۳ باشد. یعنی:

$$A = \{(۱\ ,\ ۲)\ ,\ (۱\ ,\ ۵)\ ,\ (۲\ ,\ ٤)\ ,\ (۳\ ,\ ۶)\ ,\ (٤\ ,\ ۵)\} \Rightarrow n(A) = ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

۱۵۵- پاسخ گزینه‌ی ۱ می‌دانیم مجموع احتمال‌ها برابر ۱ است. یعنی:

$$P(x=۱)+P(x=۲)+\dots+P(x=۶)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}+a+a=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳۰+۱۰+۵+۳}{۶۰}+۲a=۱ \Rightarrow \frac{۴۸}{۶۰}+۲a=۱ \Rightarrow \frac{۴}{۵}+۲a=۱ \Rightarrow ۲a=\frac{۱}{۵} \Rightarrow a=\frac{۱}{۱۰}$$

حال $P(۳\le x\le ۵)$ را حساب کنیم:

$$P(۳\le x\le ۵)=P(x=۳)+P(x=۴)+P(x=۵)=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۵+۳+۶}{۶۰}=\frac{۷}{۳۰}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال: آزادبه فرزان

هندسه پایه و تحلیلی: مهندس رضا شریف‌خطیبی

مهندس علیرضا شریف‌خطیبی

ریاضیات گسسته: مهندس عطا ا... صادقی