۸۱- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\log_{3}^{3^{3}\sqrt[3]{3^{4}}}+\log_{7}^{7^{-2}}+\log_{2^{\frac{1}{4}}}^{2^{\frac{3}{2}}}=\log_{3}^{3^{3+\frac{4}{3}}}+(-2)+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\log_{2}^{2}=(3+\tfrac{4}{3})+(-2)+6=\tfrac{25}{3}$$

۸۲- پاسخ گزینه‌ی ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx+1-m=0$ را x_1 و x_2 بنامیم:

$$x_1+x_2=m\quad,\quad x_1x_2=1-m$$

طبق فرض باید $x_1^2+x_2^2=1$ باشد. بنابراین:

$$x_1^2+x_2^2=1\ \Rightarrow\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1\ \Rightarrow\ (m)^2-2(1-m)=1\ \Rightarrow\ m^2+2m-3=0$$

$$\Rightarrow\ (m-1)(m+3)=0\ \Rightarrow\ m=1,-3$$

از طرفی این معادله در صورتی دو ریشه‌ی حقیقی دارد که $\Delta>0$ باشد.

$$\Delta=(-m)^2-4(1)(1-m)=m^2+4m-4$$

به ازای $m=1$، مقدار Δ مثبت می‌شود ولی به ازای $m=-3$ مقدار Δ منفی می‌شود. پس تنها جواب مسئله $m=1$ است.
این تست گزینه‌ی صحیح ندارد.

۸۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

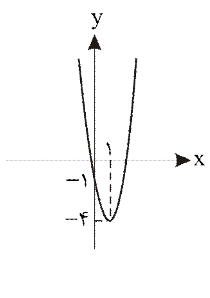
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\left(\sin\frac{\pi}{3n}+\sin\frac{2\pi}{3n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{3n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{3n}\sin\frac{\pi i}{3n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}(\frac{i}{n})\right)=\int_0^1\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}x)dx=-\cos(\frac{\pi}{3}x)\Big|_0^1=-\cos\frac{\pi}{3}+\cos(0)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

۸۴- پاسخ گزینه‌ی ۴ طبق روابط هم‌ارزی:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}$$

۸۵- پاسخ گزینه‌ی ۴ ریشه‌های معادله‌ی $x^4-4x-1=0$، محل تلاقی نمودار $f(x)=x^4-4x-1$ با محور x هاست. نمودار f را رسم می‌کنیم.



$$f'(x)=4x^3-4\ \xrightarrow{f'(x)=0}\ x=1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f''	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

همان‌طورکه مشخص است، f دارای دو ریشه است.

۸۶- پاسخ گزینه‌ی ۲

f زوج $\Rightarrow\ f(-x)=f(x)\ \Rightarrow\ -f'(-x)=f'(x)\ \Rightarrow\ f'(-x)=-f'(x)\ \Rightarrow$ f' تابع فرد است.

g فرد $\Rightarrow\ g(-x)=-g(x)\ \Rightarrow\ -g'(-x)=-g'(x)\ \Rightarrow\ g'(-x)=g'(x)\ \Rightarrow$ g' تابع زوج است.

۸۷- پاسخ گزینه‌ی ۱ نمودار تابع داده شده از نمودارهای معروف ریاضیات است. گزینه‌ی (۱) صحیح است. البته با استدلال زیر می‌توانستیم گزینه‌ی درست را انتخاب کنیم. با توجه به اینکه $y=\sqrt[3]{x^2}\geq 0$ است، نمودار تابع همواره بالای محور xهاست. بنابراین گزینه‌های (۲) و (٤) رد می‌شوند. این تابع به وضوح مجانب قائم ندارد. پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

توضیح: نمودار این تابع، مانند هر تابع دیگر به کمک جدول تغییرات نیز قابل رسم است.

۸۸- پاسخ گزینه‌ی ٤ ($\pm$ علامت $3x-2$ است.) $f(x)=\sqrt{|3x-2|} \Rightarrow f'(x)=\pm\frac{3}{2\sqrt{|3x-2|}}$

بنابراین نقطه‌ی بحرانی تابع $x=\frac{2}{3}$ است.

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$f(x)$	$\sqrt{2}$	0	1

بنابراین ماکسیمم تابع $\sqrt{2}$ و می‌نیمم آن برابر ۰ است.

۸۹- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

با فرض $t=\sqrt{x^2+1}$ به تابع $g(t)=t+\frac{1}{t}$ می‌رسیم. واضح است که $t\in[1,\infty)$. برد توابع f و g با هم برابر است.

$$g'(t)=1-\frac{1}{t^2} \xrightarrow{g'(t)=0} 1-\frac{1}{t^2}=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$$

بنابراین g در دامنه‌ی تعریفش پیوسته است و نقطه‌ی بحرانی ندارد. بنابراین از جدول زیر برد تابع مشخص می‌شود.

t	1	$+\infty$
$g(t)$	2	$+\infty$

بنابراین:

$$R_g=R_f=[2,+\infty)$$

۹۰- پاسخ گزینه‌ی ۲ فرض مسئله را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$5-\frac{1}{5}<x<5+\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{5}<x-5<\frac{1}{5} \Leftrightarrow |x-5|<\frac{1}{5}$$

حال حکم مسئله را ساده می‌کنیم.

$$\left|\frac{x^2-3x}{2x-6}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x(x-3)}{2(x-3)}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x-5}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-5|<2\varepsilon$$

بنابراین:

$$2\varepsilon=\frac{1}{5} \Rightarrow \varepsilon=\frac{1}{10}$$

۹۱- پاسخ گزینه‌ی ۱ چون واریانس داده‌های ٤ و c و b و a برابر صفر است، یعنی داده‌ها پراکندگی ندارند. پس همگی با هم برابرند، بنابراین $a=b=c=4$ حالا میانگین داده‌های ۸ و ۷ و ٦ و ۵ را به‌دست می‌آوریم: $\frac{5+6+7+8}{4}=\frac{26}{4}=6/5$

۹۲- پاسخ گزینه‌ی ٤ بررسی گزینه‌ها:

۱- در تابع $y=x^4-2x^2$ مشتق $y'=4x^3-4x$ دارای سه ریشه‌ی $x=0,\pm1$ است. یعنی تابع دارای سه اکسترمم نسبی است و یک به یک نیست. بنابراین معکوس پذیر نمی‌باشد. نمودار تقریبی تابع به‌صورت مقابل است.

۲- تابع $y=[x]$ در بازه‌های $[k,k+1)$ که k عدد صحیح است، تابع ثابت است. بنابراین یک به یک نیست و معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

۳- در تابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲}$ مشتق $y' = ۳x^{۲} - ۶x$ دارای دو ریشه‌ی $x = ۰,۲$ است. یعنی تابع دارای دو اکسترمم نسبی است و یک به یک نیست. بنابراین معکوس پذیر نمی‌باشد. نمودار تقریبی تابع به صورت مقابل است.

۴- در تابع $y = x^{۳} + x + ۱$ مشتق $y' = ۳x^{۲} + ۱$ همواره مثبت است. پس این تابع صعودی اکید و در نتیجه یک به یک است. بنابراین این تابع معکوس‌پذیر است. نمودار تقریبی تابع به صورت مقابل است.

۹۳- پاسخ گزینه‌ی ۴

۹۴- پاسخ گزینه‌ی ۱ مطابق شکل حد تابع در $+\infty$ برابر ۲- است:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^{۲} + bx + ۴}} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^{۲}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{x} = a \Rightarrow a = -۲$$

از طرفی برد تابع $-۲ < y < ۲$ است پس باید برای هر x حقیقی نامساوی $|y| < ۲$ برقرار شود:

$$|y| < ۲ \Rightarrow \left|\frac{-۲x}{\sqrt{x^{۲} + bx + ۴}}\right| < ۲ \Rightarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^{۲} + bx + ۴}}\right| < ۱ \Rightarrow |x| < \left|\sqrt{x^{۲} + bx + ۴}\right|$$

$$\Rightarrow x^{۲} < x^{۲} + bx + ۴ \Rightarrow bx + ۴ > ۰$$

اما یک عبارت درجه اول نمی‌تواند همواره مثبت باشد. پس باید $b = ۰$ باشد.

۹۵- پاسخ گزینه‌ی ۲ طبق رابطه‌ی مشتق ضمنی:

$$۲x^{۲} + y^{۲} = ۲ \Rightarrow y' = -\frac{۴x}{۲y} \Rightarrow y' = -\frac{۲x}{y} \xrightarrow{A\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},۱\right)} y'_A = -\frac{\sqrt{۲}}{۱} = -\sqrt{۲}$$

پس شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A برابر $-\sqrt{۲}$ و در نتیجه شیب خط قائم بر منحنی در این نقطه برابر $-\frac{۱}{-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌باشد.

۹۶- پاسخ گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{۲}{k^{۲} + k} = \frac{۲}{k(k+۱)} = \frac{۲}{k} - \frac{۲}{k+۱}$$

با فرض $a_k = \frac{۲}{k}$، خواهیم داشت $a_{k+۱} = \frac{۲}{k+۱}$ و بنابراین حاصل سری طبق رابطه‌ی تلسکوپی برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۲}{k^{۲} + k} = \sum_{k=۱}^{\infty} \left(\frac{۲}{k} - \frac{۲}{k+۱}\right) = \sum_{k=۱}^{\infty} (a_k - a_{k+۱}) = ۲ - ۰ = ۲$$

۹۷- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x) = \frac{x - |۳x|}{۲} = \begin{cases} -x & x \geq ۰ \\ ۲x & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -۱ & x > ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\left(f(g(x))\right)' = g'(x)f'(g(x)) = (\cos x)f'(\sin x)$$

در صورت مسئله گفته شده که $x < ۰$ است. در این شرایط $\sin x$ ممکن است مثبت یا منفی باشد. احتمالاً منظور طراح تست این است که حالت $\sin x < ۰$ را در نظر بگیریم که در این حالت:

$$\left(f(g(x))\right)' = (\cos x)(۲) = ۲\cos x$$

۹۸- پاسخ گزینه‌ی ۲

۹۹- پاسخ گزینه‌ی ۱ از روابط مربوط به بحث دیفرانسیل می‌دانیم:

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

حال با فرض $f(x)=\sqrt{x}$ ، $x=۱۶$ و $\Delta x = ۱$ ، جواب مسئله به دست می‌آید. توجه کنید که $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ است.

$$\sqrt{۱۷}=\sqrt{۱۶+۱}\simeq\sqrt{۱۶}+\frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}\times ۱ = ٤+\frac{۱}{۸}=٤/۱۲٥$$

۱۰۰- پاسخ گزینه‌ی ۴ طبق رابطه‌ی قضیه‌ی مقدار میانگین (تذکر ٤) برای تابع $f(x)=\sqrt{۱۰۰-x^۲}$ در بازه‌ی $[-٦\,,\,۸]$:

$$f'(c)=\frac{f(۸)-f(-٦)}{۸-(-٦)}=\frac{\sqrt{۳٦}-\sqrt{٦٤}}{۱٤}=-\frac{۱}{۷}$$

با توجه به ضابطه‌ی تابع، $f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۰۰-x^۲}}$:

$$\frac{-c}{\sqrt{۱۰۰-c^۲}}=-\frac{۱}{۷} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{۱۰۰-c^۲}}=\frac{۱}{۷} \Rightarrow \sqrt{۱۰۰-c^۲}=۷c \xrightarrow{c\geq ۰} ۱۰۰-c^۲=٤۹c^۲ \Rightarrow c^۲=۲$$

با توجه به شرط $c\geq ۰$، جواب مسئله $c=\sqrt{۲}$ است. بنابراین پاسخ تست دارای اشکال است.

۱۰۱- پاسخ گزینه‌ی ٤

۱۰۲- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\int_۰^۱\frac{\text{Arctan}\,x}{۱+x^۲}dx=\int_۰^۱\frac{۱}{۱+x^۲}(\text{Arctan}\,x)dx=\int_۰^۱ u'u\,dx=\frac{۱}{۲}u^۲=\frac{۱}{۲}(\text{Arctan}\,x)^۲\Big|_۰^۱$$

$$\frac{۱}{۲}\left(\text{Arctan}(۱)\right)^۲-\frac{۱}{۲}\left(\text{Arctan}(۰)\right)^۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^۲-۰=\frac{\pi^۲}{۳۲}$$

۱۰۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$f(t)=\int_۰^{\cos t}\frac{dx}{۱-x^۲} \Rightarrow f'(t)=(-\sin t)\frac{۱}{۱-\cos^۲ t}-۰=\frac{-\sin t}{\sin^۲ t}=-\frac{۱}{\sin t}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۳}}=-\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

۱۰۴- پاسخ گزینه‌ی ۳ داریم $p^{۲}=۲۱+q^{۲}$ در نتیجه $(p-q)(p+q)=۲۱$. با توجه به این‌که ضرب دو عدد برابر $۲۱=۳\times۷$ شده‌است، دو حالت زیر به‌وجود می‌آید:

الف) $\begin{cases} p-q=۱ \\ p+q=۲۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=۱۱ \\ g=۱۰ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} p-q=۳ \\ p+q=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=۵ \\ q=۲ \end{cases}$

در حالت (الف) گراف می‌تواند هم‌بند یا ناهم‌بند باشد، اما در حالت (ب) گراف حتماً ناهم‌بند است. پس سؤال درست نیست. اما بهترین جواب گزینه‌ی ۳ است.

۱۰۵- پاسخ گزینه‌ی ۳ برای پاسخ‌گویی به سوال باید احتمال قبول‌شدن دو دوست را در کنکور امسال دو پیش‌آمد مستقل فرض کنیم (توجه کنید اگر رشته‌ی امتحانی دوست‌ها یکی باشد، پیش‌آمدها مستقل نیست، چون قبول‌شدن یکی شانس قبول‌شدن دیگری را کمی کاهش می‌دهد).

احتمال آن‌که فقط یکی از دو دوست قبول شود یعنی $p(A\Delta B)$. داریم:

$$p(A\Delta B)=p(A)+p(B)-۲p(A\cap B)$$

اما چون پیش‌آمدها مستقل هستند $p(A\cap B)=p(A).p(B)$ داریم:

$$p(A\Delta B)=۰/٤+۰/٦-۲\times۰/٤\times/٦=۰/۵۲$$

۱۰۶- پاسخ گزینه‌ی ۲ می‌دانیم اگر $(a\,,\,b)=d$ باشد $\left(\frac{a}{d}\,,\,\frac{b}{d}\right)$ است. $\frac{a}{b}$ را برابر a' و $\frac{b}{a}$ را برابر b' فرض می‌کنیم.

دقت کنید که $(a'\,,\,b')=۱$، دراین‌صورت داریم:

$$[a\,,\,b]=[a'd\,,\,b'd]=d[a'\,,\,b']=a'b'd$$

دراین‌صورت داریم:

$$a'b'd=d+۱ \Rightarrow a'b'd-d=۱ \Rightarrow d(a'b'-۱)=۱ \Rightarrow d=۱$$

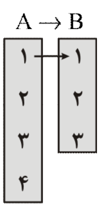
$$\Rightarrow a'b'-۱=۱ \Rightarrow a'b'=۲ \Rightarrow \begin{cases} a'=۲ \\ b'=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۵$$

۱۰۷- پاسخ گزینه‌ی ۱ می‌دانیم تابعی را پوشا می‌گویند که برد آن همه‌ی عناصر هم‌دامنه را پوشش دهد مثلاً تابع $f=\{(۱\,,\,۱)(۲\,,\,۲)(۳\,,\,۳)(٤\,,\,۳)\}$ که از $A=\{۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,٤\}$ به $B=\{۱\,,\,۲\,,\,۳\}$ تعریف شده‌است، پوشا است زیرا:

برد تابع f $R_f=\{۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,٤\}=B$

اما مثلاً تابع $Rg=\{۱\,,\,۲\}\neq B$ پس زمانی تابع پوشا نیست که دست‌کم یکی از عناصر B یعنی ۱ یا ۲ یا ۳ در تابع نباشد. برای پیدا کردن تعداد توابع پوشا تعداد کل توابع را از توابع غیر پوشا کم می‌کنیم:

$A'\cap B'$	A'	کل توابع
$\boxed{۱}$	$\boxed{۲}$	$\boxed{۳}$
$\boxed{۱}$	$\boxed{۲}$	$\boxed{۳}$
$\boxed{۱}$	$\boxed{۲}$	$\boxed{۳}$
$\boxed{۱}$	$\boxed{۲}$	$\boxed{۳}$
۱	۱۶	۸۱



اگر A را مجموعه تابع‌هایی که در آن ۱ عضو برد تابع نیست، B را مجموعه تابع‌هایی که در آن ۲ عضو برد تابع نیست و c را مجموعه تابع‌هایی که در آن ۳ عضو برد تابع نیست فرض می‌کنیم، تعداد تابع‌های غیرپوشا برابر است با:

$$|A'\cup B'\cup C'|=|A'|+|B'|+|C'|-|A'\cap B'|-|A'\cap C|-|B'\cap C'|+|A'\cap B'\cap C'|$$

برای پیداکردن تعداد کل توابع برای هر کدام از اعضای دامنه‌ی تابع با ۳ انتخاب مواجه هستیم. بنابراین تعداد کل توابع برابر است

با $۸۱ = ۳^۴$. اما برای پیدا کردن تعداد عضوهای A'، می‌دانیم که ۱ نباید عضو برد تابع باشد، بنابراین برای هر کدام از عضوهای A' با دو انتخاب مواجه هستیم.

همین‌طور است تعداد عضوهای B' و C' اما برای پیدا کردن تعداد عضوهای $A' \cap B'$ برد تابع نه باید ۱ را داشته‌باشد و نه باید ۲ را. پس برای هر عضوهای $A' \cap B'$ فقط یک انتخاب داریم. هم‌چنین $A' \cap B' \cap C'$ هیچ عضوی ندارد. داریم:

$$|A' \cup B' \cup C'| = ۱۶+۱۶+۱۶-۱-۱-۱+۰ = ۴۵$$

حالا این تعداد را از کل توابع کم می‌کنیم. $۸۱ - ۴۵ = ۳۶$

۱۰۸- پاسخ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم تعداد درایه‌های صفر یک ماتریس برابر است با $p^۲ - ۲q$. داریم:

$$p = ۶ \Rightarrow ۳۶ - ۲q = ۲۰ \Rightarrow ۲q = ۱۶ \Rightarrow q = ۸$$

۱۰۹- پاسخ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $A - (A - B) = A \cap B$ داریم:

$$[A - (A - B)] \cup (A \cap B)' = (A \cap B) \cup (A \cap B)' = M$$

بنابراین متمم این مجموعه برابر $\varnothing$ است.

۱۱۰- پاسخ گزینه‌ی ۲ می‌دانیم در پرتاب دو تاس احتمال این‌که هر دو تاس ۱ بیاید برابر است با $\frac{۱}{۳۶}$. بنابراین احتمال مجموع ۲ آمدن در پرتاب دو تاس برابر است با $\frac{۱}{۳۶}$ پس: $p(x = ۲) = \frac{۱}{۳۶}$

از طرف دیگر اگر رابطه به‌جای x عدد ۲ قرار دهیم، داریم:

$$p(x = ۲) = a - \frac{|۲ - ۷|}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶} \Rightarrow ۹ - \frac{۵}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶} \Rightarrow a = \frac{۱}{۶}$$

۱۱۱- پاسخ گزینه‌ی ۱ این شش نفر دارند به هر حال روی یک ردیف می‌نشینند. می دانیم جای‌گشت ۶ نفر برابر است با $۶!$ یا ۷۲۰.

۱۱۲- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} x - ۲z = ۱ \Rightarrow z = \frac{x-۱}{۲} \\ y + z = -۲ \Rightarrow z = -y - ۲ \end{cases} \xrightarrow[\text{متقارن خط}]{\text{صورت}} \frac{x-۱}{۲} = -y - ۲ = z$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{u} = (۲, -۱, ۱) \\ \vec{N} = (a, ۱, ۱) \\ \alpha = ۹۰^\circ - ۳۰ = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{N}}{|\vec{u}|.|\vec{N}|} \Rightarrow \frac{۲a - ۱ + ۱}{\sqrt{۶} \times \sqrt{a^۲ + ۲}} = \frac{۱}{۲}$$

زاویه‌ی هادی خط و نرمال صفحه

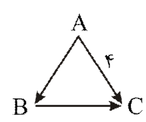
$$\Rightarrow ۴a = \sqrt{۶(a^۲ + ۲)} \Rightarrow ۱۶a^۲ = ۶a^۲ + ۱۲ \Rightarrow ۱۰a^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = \pm\sqrt{۱/۲}$$

۱۱۳- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{BC}.\overline{AC} + \overline{AB}.\overline{AC} = |\overline{AB}||\overline{BC}|\cos\hat{B} + |\overline{BC}||\overline{AC}|\cos\hat{C} + |\overline{AB}||\overline{AC}|\cos\hat{A}$$

۱۲۰° هستند زیرا $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ابتدا مشترک نیستند.

۶۰° هستند زیرا ابتدا یا انتهای یکسان دارند.



$= ۴ \times ۴ \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) + ۴ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} + ۴ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۸$ که در گزینه‌ها همچین جوابی وجود ندارد.

۱۱۴- پاسخ گزینه‌ی ۲ $\xrightarrow{A=(۲\,,\,۱)} ۱-٤(٤)+۲a+b=۰ \quad\Rightarrow\quad ۲a+b=۱۵ \quad (۱)$

مشتق ضمنی معادله‌ی منحنی به ازای هر نقطه، شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه را می‌دهد. پس می‌توان نوشت:

$$-\frac{f'x}{f'y}=\frac{-(-۸x+a)}{۲y}\ \overset{A=(۲\,,\,۱)}{=\!=\!=}\ \frac{۱٦-a}{۲}\ \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}\ ٤ \quad\Rightarrow\quad a=۸ \xrightarrow{(۱)} ۱٦+b=۱۵ \quad\Rightarrow\quad b=-۱$$

۱۱۵- پاسخ گزینه‌ی ۱ برای حل تست از این نکات کمک می گیریم:

$$\begin{cases} ۱: R_{\alpha}^{n}=R_{n\alpha} \\ ۲: R_{\alpha}R_{\beta}=R_{(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$A=R_{\frac{\pi}{٤}} \quad\Rightarrow\quad A^{۲۰}=R_{\frac{\pi}{٤}}^{۲۰}=R_{۲۰\left(\frac{\pi}{٤}\right)}=R_{۵\pi} \qquad (۱)$$

$$B=\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}=۲R_{\frac{\pi}{٦}} \quad\Rightarrow\quad B^{٦۰}=\left(۲R\frac{\pi}{٦}\right)^{٦۰}=۲^{٦۰}R_{٦۰\left(\frac{\pi}{٦}\right)}=۲^{٦۰}R_{۱۰\pi} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} A^{۲۰}\times B^{۲۰}=R_{۵\pi}\times ۲^{٦۰}R_{۱۰\pi}=۲^{٦۰}R(۵\pi+۱۰\pi)=۲^{٦۰}R_{۱۵\pi}=۲^{٦۰}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-۲^{٦۰}I$$

۱۱٦- پاسخ گزینه‌ی ۴

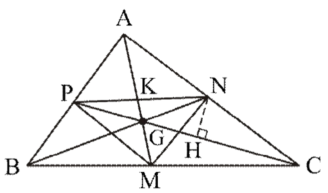
$$\begin{cases} ۲x-y+۳z=۰ \ (I) \\ ۳x+y+۲z=۰ \ (II) \quad \xrightarrow{I+III} ٦X+۲Y+٤Z=۰ \\ ٤x+۳y+z=۰ \ (III) \end{cases}$$

معادله‌ی اخیر دو برابر معادله‌ی II است. پس این دو معادله‌ی دو صفحه‌ی منطبق می‌باشد. بنابراین بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

۱۱۷- پاسخ گزینه‌ی ۴ مثلث قائم‌الزاویه است $\hat{B}=۹۰ \quad\Rightarrow\quad b^{۲}=a^{۲}+c^{۲} \xrightarrow{b^{۲}=۲ac} ۲ac=a^{۲}+c^{۲}$

$\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس: $\Rightarrow\quad (a-c)^{۲}=۰ \quad\Rightarrow\quad a=c \quad\Rightarrow\quad \hat{A}=\hat{C}=٤۵^{\circ}$

۱۱۸- پاسخ گزینه‌ی ۲ از رأس N عمود وارد بر PC را رسم می‌کنیم. داریم:



$$GC=۲GP \quad\Rightarrow\quad S\overset{\Delta}{NGC}=۲S\overset{\Delta}{PNG} \quad (۱)$$

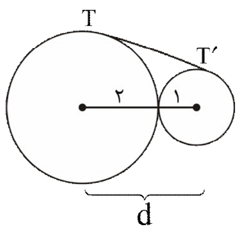
$$S\overset{\Delta}{GNC}=\frac{۱}{٦}S\overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{(۱)} S\overset{\Delta}{PNG}=\frac{۱}{۱۲}S\overset{\Delta}{ABC}$$

$$\begin{cases} PN \parallel BC \\ M \text{ وسط } BC \end{cases} \xrightarrow{\text{وسط}} K \text{ وسط } PN \quad\Rightarrow\quad S\overset{\Delta}{KGN}=S\overset{\Delta}{KGP}=\frac{۱}{۲}S\overset{\Delta}{PNG} \quad\Rightarrow\quad S\overset{\Delta}{KGP}=\frac{۱}{۲٤}S\overset{\Delta}{ABC}$$

۱۱۹- پاسخ گزینه‌ی ۱ تبدیل داده‌شده انتقال است و از آن‌جاکه انتقال ایزومتری است، پس مساحت شکل حفظ می‌شود:

$$SA'B'C'D'=۲\times۲=٤$$

۱۲۰- پاسخ گزینه‌ی ۳



$$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}=\sqrt{۳^{۲}-(۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال: مهندس مهرداد عباس‌پور

هندسه پایه و تحلیلی: مهندس رضا شریف‌خطیبی

مهندس علیرضا شریف‌خطیبی

ریاضیات گسسته: مهندس عطا صادقی