



۱۲۶- پاسخ گزینه‌ی ۱ برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، باید

$$\Delta < 0 \text{ باشد، پس داریم: } \Delta = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{4}m + 2\right) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0$$

$$m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

۱۲۷- پاسخ گزینه‌ی ۴ برای به دست آوردن مجموع جملاتی که از جمله‌ی بیست و پنجم شروع و به جمله‌ی سی و پنجم ختم

می‌شود، باید مجموع سی و پنجم جمله‌ی اول تصاعد را منهای مجموع بیست و چهار جمله‌ی اول آن کنیم.

$$S_{30} - S_{24} = \frac{30(32)}{2} - \frac{24(21)}{2} = 30(16) - 6(21) = 480 - 126 = 354$$

۱۲۸- پاسخ گزینه‌ی ۴ $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$

$$\text{روش اول: } \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right)\left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}\sin^2 x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - 3\sin^2 x = -1 \Rightarrow 1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x = -1 \Rightarrow 4\sin^2 x = 2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

می‌دانیم: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ روش دوم

$$\text{پس داریم: } \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{4}$$

$$\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} = -1 \Rightarrow \cos 2x - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۲۹- پاسخ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم عددی مضرب ۶ است که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳. اگر چهار رقم ۱ و ۲ و ۳ و ۴

کنار هم قرار داده‌شوند. عدد حاصل، حتماً مضرب ۳ خواهد بود. پس کفایت تعداد اعداد چهاررقمی مضرب ۲ (زوج) را محاسبه کنیم، داریم:

$$\text{الف) اگر رقم یکان صفر باشد. } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 6 \Rightarrow n(A) = 6 + 4 = 10$$

$$\text{ب) اگر رقم یکان ۲ باشد. } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 4$$

از طرفی تعداد اعداد چهاررقمی که با کنار هم قرار دادن ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ حاصل می‌شود برابر است با:

$$n(S) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 18, \quad p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

۱۳۰- پاسخ گزینه‌ی ۳ در کتاب درسی دقیقاً ذکر شده است که مساحت نمودار مستطیلی با سطح زیر چندبر فراوانی که دو

سر آن روی محور افقی باشد با هم برابرند. پس نسبت $\frac{S}{S'}$ برابر ۱ خواهد بود.



۱۳۱- پاسخ گزینه‌ی ۲ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{۲۴ + ۱۸ + ۱۲۰ + ۶۶ + ۱۲}{۲۴} = \frac{۲۴۰}{۲۴} = ۱۰$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{۲(۴) + ۲(۱) + ۱۲(۰) + ۶(۱) + ۱(۴)}{۲۴} = \frac{۲۴}{۲۴} = ۱ \Rightarrow \sigma = ۱$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

ضریب تغییرات

۱۳۲- پاسخ گزینه‌ی ۱ بدیهی است نقاط $(۱, ۰)$ و $(۰, -۶)$ و $(-۲, -۶)$ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند.

$$(۰, -۶) \Rightarrow c = -۶$$

$$(۱, ۰) \Rightarrow a + b - ۶ = ۰$$

$$(-۲, -۶) \Rightarrow ۴a - ۲b - ۶ = -۶ \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۶ \\ ۲a - b = ۰ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۴ \end{cases} \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x) = ۲x^2 + ۴x - ۶$ خواهد بود که $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱) = ۲ - ۴ - ۶ = -۸$$

۱۳۳- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x) = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow f(x^2) - ۲f(x) + ۱ = \frac{x^2}{x^2-۱} - \frac{۲x}{x-۱} + ۱ = \frac{x^2 - ۲x(x+۱) + x^2 - ۱}{x^2-۱}$$

$$= \frac{x^2 - ۲x^2 - ۲x + x^2 - ۱}{x^2-۱} = \frac{-۲x - ۱}{x^2-۱} = \frac{۲x+۱}{۱-x^2}$$

۱۳۴- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۲x - \sqrt{x^2 + ۶x}}{ax - ۲} = ۳ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۲x - |x|}{ax} = ۳ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۲x + x}{ax} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{a} = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{۲x - \sqrt{x^2 + ۶x}}{x - ۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{۲ - \frac{۲x+۶}{2\sqrt{x^2+6x}}}{1} = ۲ - \frac{۰}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

۱۳۵- پاسخ گزینه‌ی ۱ برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ۳x^2 + ۴}{x - ۲} & x > ۲ \\ ۲x + b & x \leq ۲ \end{cases}$ همواره پیوسته باشد در نقطه‌ی $x = ۲$

پیوسته باشد.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{x^2 - ۳x^2 + ۴}{x - ۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳x^2 - ۶x}{1} = ۰ \\ \lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow ۲^-} ۲x + b = ۴ + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow ۴ + b = ۰ \Rightarrow b = -۴$$

۱۳۶- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$y = \frac{۱ + \cos ۲x}{\cos ۲x} = \frac{۱}{\cos ۲x} + ۱ \Rightarrow y' = \frac{۰ + ۲ \sin ۲x}{\cos^2 ۲x} \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{۱۲} \right) = \frac{۲ \sin \frac{\pi}{۶}}{\cos^2 \frac{\pi}{۶}} = \frac{۱}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۳}$$



۱۳۷- پاسخ گزینه ۱ $y = ax^2 + bx^2 - \varepsilon x$

با توجه به نزولی بودن تابع باید $a < 0$ باشد. یعنی گزینه ۱ یا ۲ درست خواهد بود. پس a برابر ۱- است، یعنی تابع به صورت

$$y = -x^2 + bx^2 - \varepsilon x$$

می باشد. از طرفی مشتق این تابع نباید ریشه داشته باشد. یعنی باید $\Delta < 0$ مشتق باشد. پس داریم:

$$y' = -2x + 2bx - \varepsilon \xrightarrow{\Delta' < 0} b^2 - 12 < 0 \Rightarrow -\sqrt{12} < b < \sqrt{12}$$

با توجه به محدوده‌ی به دست آمده، $b = 2$ می تواند درست باشد.

۱۳۸- پاسخ گزینه ۲ چون می دانیم یکی از فرزندان پسر است پس این خانواده ۳ فرزند ی صاحب ۳ فرزند دختر

نمی باشد و فضای نمونه‌ای دارای ۷ عضو است. $S = \{bgg, gbg, ggb, bbg, gbb, bgb, bbb\}$ و مجموعه‌ی حالات مطلوب

به صورت $A = \{bgg, gbg, ggb\}$ می باشد. پس احتمال وقوع پیشامد A برابر است با: $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{7}$

۱۳۹- پاسخ گزینه ۴ $p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow p(x = 2) = \binom{4}{2} (0/6)^2 (0/4)^1 = 6 \times 0/216 \times 0/4 = 0/3456$

۱۴۰- پاسخ گزینه ۲ با تلاقی دو ضلع AB و AC مختصات رأس A به دست می آید.

$$AB: \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$AC: \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$2x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2y + \frac{7}{2} = 2 \Rightarrow 2y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow A\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است؛ پس داریم:

$$BC: 2y + 2x = 6 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{2}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{2}{2}$$

$$AH: y - \frac{3}{4} = \frac{2}{2}\left(x + \frac{7}{2}\right) \Rightarrow 2y - 1.5 = 2x + 7 \Rightarrow 2y - 3 = 2x + 14 \Rightarrow 2y - 2x = 17$$

۱۴۱- پاسخ گزینه ۴ ابتدا نقاط انفصال تابع $f(x) = [\varepsilon \sin^2 \pi x]$ را در بازه‌ی $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ تعیین می کنیم.

$$0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \pi x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin \pi x < 1 \Rightarrow 0 < \sin^2 \pi x < 1 \Rightarrow 0 < \varepsilon \sin^2 \pi x < \varepsilon$$

نقاطی که داخل براکت را عدد صحیح می کنند، عبارتند از:

$$\Rightarrow \varepsilon \sin^2 \pi x = 1, 2, 3 \Rightarrow x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$$

از طرفی تابع در نقطه‌ی $x = \frac{1}{6}$ پیوستگی چپ ندارد. پس جمعاً دارای چهار نقطه‌ی انفصال است.

۱۴۲- پاسخ گزینه ۲ ابتدا یکنوایی دنباله‌ی $U_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$ را بررسی می کنیم:

$$U'_n = \frac{(2-3)2n}{(n^2+1)^2} < 0 \Rightarrow \text{دنباله نزولی است.}$$

چون دنباله نزولی است داریم: $\forall n \in \mathbb{N} : L < U_n \leq U_1$ (حد دنباله است). در دنباله‌ی نزولی جمله‌ی اول کوچکترین کران بالا

و حد دنباله بزرگترین کران پایین است. پس داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 2$



$$f(t) = 90 - 50e^{-0.2t} \Rightarrow 60 = 90 - 50e^{-0.2t} \Rightarrow 50e^{-0.2t} = 30 \Rightarrow e^{-0.2t} = \frac{3}{5}$$

۱۴۳- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\Rightarrow -0.2t = \ln \frac{3}{5} \Rightarrow -0.2t = -\ln 2 \Rightarrow 0.2t = 0.7 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\begin{cases} \log_2^x = \log_2^y + \log_2^{(y+1)} \\ x^2 - y^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ x^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (2y+2)^2 - y^2 = 32 \end{cases}$$

۱۴۴- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\Rightarrow 4y^2 + 8y + 4 - y^2 = 32 \Rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0 \Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{16 + 84}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-8 \pm 10}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases}, y = -\frac{14}{3} \text{ غ.ق.ق}$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x+y)} = \log_2^6 = \log_2^8 = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon x}} = (\epsilon x)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \epsilon (\epsilon x)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{\epsilon}{3 \sqrt[3]{(\epsilon x)^4}}$$

۱۴۵- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$m = y'(2) = \frac{-\epsilon}{3 \sqrt[3]{\epsilon^4}} = \frac{-\epsilon}{3 \times 8 \times 2} = -\frac{1}{12}$$

$$\text{معادله‌ی مماس: } y - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

۱۴۶- پاسخ گزینه‌ی ۲ در نقاط $x = -5$ و $x = 2$ ریشه‌های مشتق تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ می‌باشند.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{2a}{3} = -2 \Rightarrow a = 3 \\ P = \frac{b}{3} = -10 \Rightarrow b = -30 \end{cases}$$

با توجه به تعیین علامت مشتق نقطه‌ی $x = 2$ طول مینیمم نسبی تابع می‌باشد که مقدار مینیمم نسبی (عرض مینیمم) برابر است با:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \epsilon x \Rightarrow f(2) = 27 + 12 - 130 = -91$$

$$y = (x-1) \ln x \quad D_f = \mathbb{R}^+$$

۱۴۷- پاسخ گزینه‌ی ۳

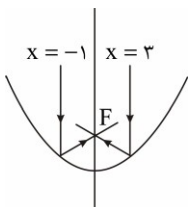
$$y' = \ln x + \frac{1}{x}(x-1) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع که $x > 0$ می‌باشد علامت y'' همواره مثبت است و تقعر تابع در هیچ نقطه‌ای روبه پایین نیست.

۱۴۸- پاسخ گزینه‌ی ۱ سهمی قائم است و اگر دقت کنیم دو اشعه‌ی تابانده شده بر سهمی به موازات محور کانونی سهمی بر

سهمی تابانده شده‌اند. لذا بازتاب آن‌ها از کانون خواهد گذشت. پس نقطه‌ی تلاقی بازتاب آن‌ها، کانون سهمی خواهد بود.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - \epsilon y + 9 = 0 &\Rightarrow (x-1)^2 - 1 - \epsilon y + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = \epsilon y - 8 \\ \Rightarrow (x-1)^2 = \epsilon(y-2) &\Rightarrow \begin{cases} S(1, 2) \quad P=1 \\ F(\alpha, \beta+P) = (1, 3) \end{cases} \end{aligned}$$



۱۴۹- پاسخ گزینه ۲ $\Rightarrow \varepsilon x^2 - y^2 - 8x - 4y = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(x^2 - 2x) - (y^2 + 4y) = \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon((x-1)^2 - 1) - ((y+2)^2 - 4) = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(x-1)^2 - (y+2)^2 = \varepsilon$

$\Rightarrow (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{\varepsilon} = 1 \Rightarrow x-1 = \pm \frac{y+2}{\sqrt{\varepsilon}}$ معادله‌ی مجانب‌ها

معادله‌ی یکی از مجانب‌ها را می‌نویسیم و فاصله‌ی کانون را از آن به دست می‌آوریم:

$2x - 2 = y + 2 \Rightarrow 2x - y - 4 = 0$

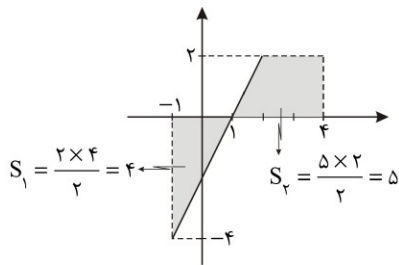
مرکز هذلولی نقطه‌ی $(1, -2)$ و $C = \sqrt{5}$ است. با توجه به افقی بودن هذلولی مختصات یک کانون هذلولی عبارت است از:

$F(\alpha + C, \beta) = (1 + \sqrt{5}, -2)$

فاصله‌ی کانون از مجانب $FH = \frac{|2 + 2\sqrt{5} + 2 - 4|}{\sqrt{4+1}} = 2$

روش دوم: ثابت می‌شود فاصله‌ی هر کانون از خط مجانب هذلولی برابر b می‌باشد. با داشتن این مطلب می‌توانیم بعد از نوشتن معادله‌ی استاندارد هذلولی پاسخ تست را بدهیم.

۱۵۰- پاسخ گزینه ۲



$f(x) = x - |x - 2|$

$f(-1) = -4 \quad f(2) = 2 \quad f(1) = 0$

$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -4 + 0.5 = -3.5$

روش دوم: می‌توانیم بدون استفاده از نمودار نیز حاصل $\int_{-1}^2 (x - |x - 2|) dx$ را به دست آوریم.

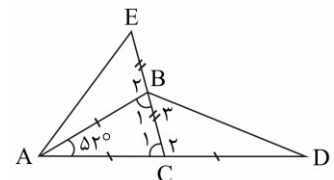
$\int \frac{x-1}{x^2} dx = \frac{f(x)}{2x^2} + C \Rightarrow \int (x-1)x^{-2} = \int (x^{-2} - x^{-3}) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + C$

۱۵۱- پاسخ گزینه ۳

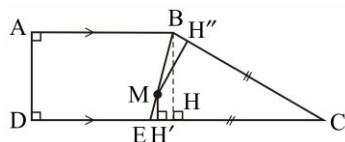
$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C = \frac{-2x + 1}{2x^2} + C \Rightarrow f(x) = -2 + \frac{1}{x}$

۱۵۲- پاسخ گزینه ۴

$\hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2$
 $\left. \begin{matrix} BE = BC \\ AB = AC \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta ABE \cong \Delta BCD$



$\hat{B}_2 = \hat{E} \quad (\hat{1}) \Rightarrow \Delta BCD : \hat{E} + \hat{D} \stackrel{(\hat{1})}{=} \hat{B}_2 + \hat{D} \stackrel{\text{زاویه‌ی خارجی غیرمجاور}}{=} \hat{C}_1 = \frac{180 - 52}{2} = 64^\circ$



۱۵۳- پاسخ گزینه ۴ از نکات مثلث متساوی‌الساقین به یاد داریم که: مجموع فواصل

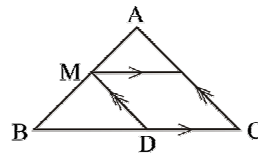
هر نقطه‌ی دلخواه تا دو ساق مثلث برابر با ارتفاع وارد بر ساق است و از آن‌جا که نوزنقه‌ی

قائم‌الزاویه است، یعنی: $MH' + MH'' = BH$. پس: $BH = AD$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC, \quad MD \parallel AC \Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle ABC$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{MB} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = k_1 \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = k_1^2 = \frac{4}{25} \\ \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5} = k_2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle BMD}}{S_{\triangle ABC}} = k_2^2 = \frac{9}{25} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle BMD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNCD}}{S_{\triangle ABC}} = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 48\%$$



۱۵۴- پاسخ گزینه ۱

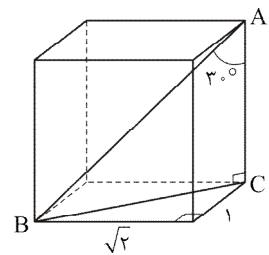
$$\text{قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{2+1+a^2}$$

$$BC = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\triangle ABC: \sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+a^2}} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{3+a^2}$$

$$\Rightarrow 12 = 3 + a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \text{ ق.ق} \end{cases}$$

۱۵۵- پاسخ گزینه ۳



ریاضی تجربی: مهندس افشین ملاکپور

هندسه تجربی: مهندس رضا شریف خطیبی

مهندس علیرضا شریف خطیبی