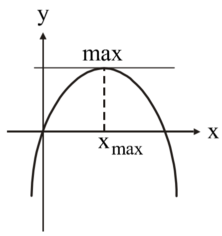
۱۰۱- پاسخ گزینه‌ی ؟؟؟!!! برای آن‌که تابع درجه‌ی II از ناحیه‌ی دوم عبور نکند همان‌طورکه در شکل‌های زیر دیده می‌شود، اولاً: باید max داشته‌باشد، ثانیاً: به‌دلیل آن‌که از مبدأ مختصات عبور می‌کند $(c=۰)$ باید طول نقطه‌ی max تابع مثبت باشد:



$$y = ax^{۲} - (a+۲)x$$

$$\text{اولاً: تابع max دارد} \Rightarrow x^{۲}\ \text{ضریب}: a<۰ \quad (I)$$

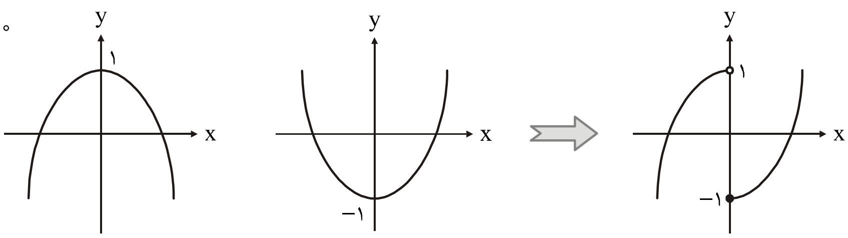
$$\text{ثانیاً:}\ x_{max}>۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a}>۰ \Rightarrow \frac{a+۲}{۲a}>۰$$

$$\xrightarrow{\text{مطابق اولاً: } a<۰} a+۲<۰ \Rightarrow a<-۲$$

$$(II) \xrightarrow{(I)\cap(II)} a<-۲ \Rightarrow \text{در گزینه‌ها موجود نیست!}$$

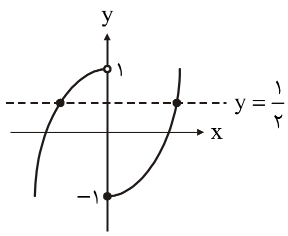
۱۰۲- پاسخ گزینه‌ی ۲ به کمک نمودار تابع یک‌به‌یک و پوشابودن را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۰ \\ ۱-x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$



$y=۱-x^{۲}$ $\quad$ $y=x^{۲}-۱$

بنابراین برد تابع R است پس تابع پوشا است اما یک‌به‌یک نیست زیرا خطی مانند $y=\frac{۱}{۲}$ نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



۱۰۳- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \Rightarrow \begin{cases} S_۳=۱۳۶ \Rightarrow \dfrac{a_۱(۱-q^{۳})}{۱-q}=۱۳۶ \quad (I) \\ S_۶=۱۵۳ \Rightarrow \dfrac{a_۱(۱-q^{۶})}{۱-q}=۱۵۳ \quad (II) \end{cases}$$

$$\frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{۱-q^{۳}}{۱-q^{۶}=(۱-q^{۳})(۱+q^{۳})}=\frac{۱۳۶}{۱۵۳} \Rightarrow \frac{۱}{۱+q^{۳}}=\frac{۱۳۶}{۱۵۳} \Rightarrow ۱+q^{۳}=\frac{۱۵۳}{۱۳۶} \Rightarrow q^{۳}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow \boxed{q=\frac{۱}{۲}}$$

$$a_۱=k\times a_۵ \Rightarrow a_۱=k\times a_۱q^{۴} \Rightarrow k\times\frac{۱}{۱۶}=۱ \Rightarrow \boxed{k=۱۶}$$

۱۰۴- پاسخ گزینه‌ی ۴ اگر بخواهیم از میان ۵ سؤال اول دستکم ٤ سؤال انتخاب شود، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:
۱- چهار سؤال از پنج سؤال اول انتخاب شود و چهار سؤال از پنج سؤال بعدی. یا ۲- پنج سؤال همان پنج سؤال اول باشند و سه سؤال از پنج سؤال بعدی انتخاب شوند؛ تعداد جواب‌های هر حالت را پیداکرده با هم جمع می‌کنیم.

$$\binom{٤}{٥}\times\binom{٤}{٥}+\binom{٥}{٥}\times\binom{٣}{٥}=٢٥+١٠=٣٥$$

۱۰۵- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ٠ & x\in Z \\ -١ & x\notin Z \end{cases} \\ g(x)=x^٢+x-٢ \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} g(٠)=-٢ \\ g(-١)=-٢ \end{cases} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad g(f(x))=-٢ \quad\Rightarrow\quad x\in R$$

۱۰۶- پاسخ گزینه‌ی ۱ عبارت $f(x)=x^{٢n+١}+٢x^{٢n}+x^٥-٥x^٣+k$ بر $x+٢$ بخش‌پذیر است پس:

$$f(-٢)=٠ \quad\Rightarrow\quad f(x)=x^{٢n}(x+٢)+x^٥-٥x^٣+k \xrightarrow{f(-٢)=٠} k+٨=٠ \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-٨}$$

$$f(x)=x^{٢n}(x+٢)+x^٥-٥x^٣-٨ \xrightarrow[x^٢-١]{\text{باقی‌مانده‌ی تقسیم بر}} x^٢-١=٠ \quad\Rightarrow\quad x^٢=١$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x+٢-٤x-٨=-٣x-٦$$

۱۰۷- پاسخ گزینه‌ی ۴ $g(x)=f(٣x-٤) \quad , \quad f^{-١}(x)=x+\sqrt{x} \quad , \quad g^{-١}(١٦)=?$

$$g(x)=f(٣x-٤)=y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} g(x)=y \quad\Rightarrow\quad x=g^{-١}(y) \\ f(٣x-٤)=y \quad\Rightarrow\quad ٣x-٤=f^{-١}(y) \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{f^{-١}(y)+٤}{٣} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{g^{-١}(y)=\frac{f^{-١}(y)+٤}{٣}} \xrightarrow{f^{-١}(y)=y+\sqrt{y}} \boxed{g^{-١}(y)=\frac{y+\sqrt{y}+٤}{٣}} \quad\Rightarrow\quad g^{-١}(١٦)=\frac{١٦+٤+٤}{٣}=٨$$

۱۰۸- پاسخ گزینه‌ی ۳ $\cot١٠٠=\cot\left(\dfrac{\pi}{٢}+١٠\right)=-\tan١٠$

$$A=(\cos١٠-\cos٧٠)(\tan٧٠+\tan١٠)\overset{(I)}{=}\frac{\cos١٠-\cos٧٠}{\cos٧٠}=\frac{-٢\sin٤٠\sin(-٣٠)}{\cos٧٠}$$

$$=\frac{\sin٤٠}{\cos٧٠}=\frac{\sin٤٠}{\sin٢٠}=\frac{٢\sin٢٠\cos٢٠}{\sin٢٠}=٢\cos٢٠$$

$$(I)\quad \tan٧٠+\tan١٠=\frac{\sin٧٠}{\cos٧٠}+\frac{\sin١٠}{\cos١٠}=\frac{\sin٧٠\cos١٠+\sin١٠\cos٧٠}{\cos٧٠\cos١٠}=\frac{\sin٨٠}{\cos٧٠\cos١٠}=\frac{\cos١٠}{\cos٧٠\cos١٠}=\frac{١}{\cos٧٠}$$

۱۰۹- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{١-x} & x>٠ \\ -\sqrt{١+x} & x\le ٠ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ٠^-} f(x^٣-x)=\lim_{x\to ٠^-} f(-x)=f(٠^+)=١$$

چندجمله‌ای‌های فاقد عدد ثابت در همسایگی $x=٠$ با کوچک‌ترین جمله همارز هستند، پس:

$$x^٣-x \underset{x\to ٠}{\equiv} -x$$

۱۱۰- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$$

$$g(x)=f(xf(x)) \Rightarrow g'(۲)=?$$

$$\begin{cases} g'(x)=(f(x)+xf'(x))f'(xf(x)) \Rightarrow g'(۲)=(f(۲)+۲f'(۲))f'(-۱) \\ f'(x)=-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(۲)=-\dfrac{۱}{۲} \\ f'(۲)=-\dfrac{۱}{٤} \\ f'(-۱)=-\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow g'(۲)=\left(\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۲\times\left(-\frac{۱}{٤}\right)\right)\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۱- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$y=\frac{(۲a-۱)x+۳}{۲x+a}$$

با توجه به معادلات محورهای تقارن تابع $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ که عبارتند از:

$$y=x+\frac{a+d}{c}$$
$$y=-x+\frac{a-d}{c}$$

در سؤال فوق:

محور تقارن اول: $y=x+٤ \Rightarrow \dfrac{a+d}{c}=٤ \Rightarrow \dfrac{۲a-۱+a}{۲}=٤ \Rightarrow \underline{a=۳|}$

محور تقارن دوم: $\begin{cases} y=-x+\dfrac{٥-۳}{۲}=-x+۱ \\ y=\dfrac{٥x+۳}{۲x+۳} \end{cases} \Rightarrow$ عرض از مبدأ $=۱$

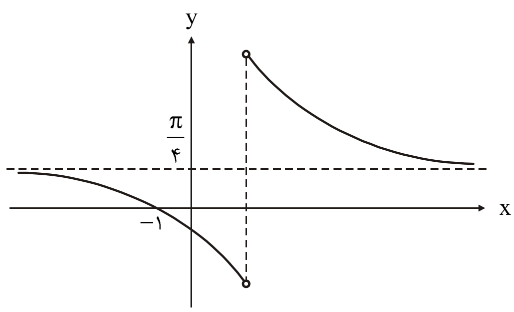
۱۱۲- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\operatorname{Arctan}\frac{ax+b}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\operatorname{Arctan} a=\frac{\pi}{٤} \Rightarrow \boxed{a=۱}$$

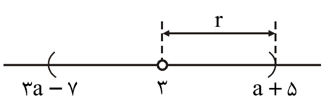
$$f(x)=\operatorname{Arctan}\frac{x+b}{x-۱} \quad , \quad f(-۱)=۰ \Rightarrow \operatorname{Arctan}\frac{-۱+b}{-۲}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{b-۱}{-۲}=۰ \Rightarrow \boxed{b=۱}$$



۱۱۳- پاسخ گزینه‌ی ۴

همسایگی محذوف متقارن:



$$\frac{a+٥+۳a-۷}{۲}=۳ \Rightarrow ٤a=۸ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow a+٥=۷ \Rightarrow \boxed{r=٤}$$

۱۱۴- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=a \Rightarrow \boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots=a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\dots=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots\right)=-\frac{1}{2}\times a=-\frac{a}{2}$$

۱۱۵- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\frac{2x+[-x]}{x^2-1}\quad,\quad a_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(a_n)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+[-x]}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x^2-1}\overset{H.}{=}\frac{2}{2x}\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{2}{2x}=1$$

۱۱۶- پاسخ گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\times\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{x\times\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\times\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱۷- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=x^3-2x\qquad x>1$$

$$10y=x+m\Rightarrow y=\frac{1}{10}x+\frac{1}{10}m$$

شیب مماس بر نمودار f در A $=k$

شیب مماس بر نمودار f^{-1} در A' $=\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{1}{k}=\frac{1}{10}\Rightarrow k=10\Rightarrow 3x^2-2=10$

$$\Rightarrow x^2=4\xrightarrow{x>1}\boxed{x=2}\Rightarrow\boxed{y=4}$$

$$\Rightarrow A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.\Rightarrow A'\left|\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right.\Rightarrow 10y=x+m\Rightarrow 20=4+m\Rightarrow\boxed{m=16}$$

۱۱۸- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+y}=5\qquad A\left|\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right.\qquad x'_t=0/2\qquad y'_t=?$$

$$\frac{x'}{2\sqrt{x}}+\frac{x'+y'}{2\sqrt{x+y}}=0\xrightarrow[x+y=9]{x=4}y'=-\frac{5}{2}x'=-\frac{5}{2}\times\frac{2}{10}=-0/5$$

۱۱۹- پاسخ گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\frac{a}{x}+bx^2\qquad A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$$

EXT نسبی $\qquad a=?\qquad$ نوع EXT $=?$

$$f(x)=\frac{a+bx^3}{x}\Rightarrow f(1)=-2\Rightarrow\boxed{-2=a+b}$$

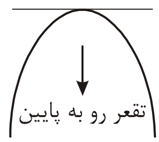
$A\Big|_{-2}^{1}$ در هوپیتال تابع نیز صدق می‌کند:

$$f(x)=\frac{3bx^2}{1} \Rightarrow -2=3b \Rightarrow b=-\frac{2}{3} \Rightarrow a=-\frac{4}{3} \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{3x}-\frac{2}{3}x^2$$

با استفاده از آزمون مشتق دوم $f''(1)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{4}{3}x=+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{4}{3}\left(-\frac{2}{x^3}-1\right) \Rightarrow f''(1)<0 \Rightarrow x=1$$:max طول نقطه‌ی

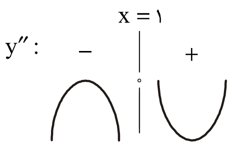


۱۲۰- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge -1\\ -13-\frac{9}{x} & x<-1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & x\ge -1\\ \frac{9}{x^2} & x<-1\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-6 & x>-1\\ -\frac{18}{x^3} & x<-1\end{cases}$$

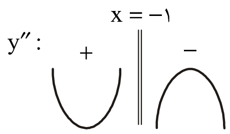
تابع در $x=-1$ مشتق‌پذیر است.

بررسی ریشه‌های مشتق دوم:



$x=1$:طول نقطه‌ی عطف

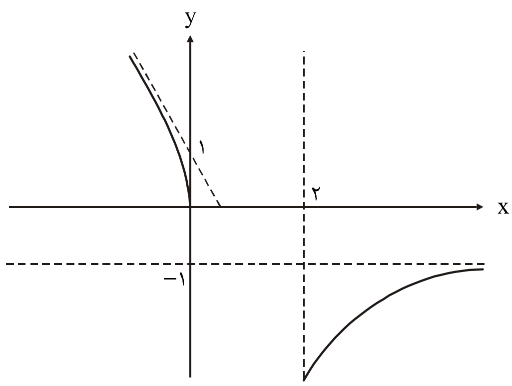
بررسی نقاط مرزی:



$x=-1$

$x=-1$ نیز طول نقطه‌ی عطف تابع است زیرا اولاً: جهت تقعر تابع در ۲ طرف $x=-1$ تغییر می‌کند، ثانیاً تابع در $x=-1$ مشتق‌پذیر است و $f'(-1)=9$ است. پس $x=-1$ نقطه‌ی عطف مایل تابع است. یعنی تابع دارای ۲ نقطه‌ی عطف $\{1,-1\}$ است.

۱۲۱- پاسخ گزینه‌ی ۱



$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+bx} \qquad (a,b)=?$$

$$y=-1 \Rightarrow \underset{x\to+\infty}{y}=ax+\left|x+\frac{b}{2}\right|=(a+1)x+\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}\\ \frac{b}{2}=-1 \Rightarrow \boxed{b=-2}\end{cases}$$

۱۲۲- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$x^{۳}+۲x-۲=۰ \Rightarrow f(x)=x^{۳}+۲x-۲$$

چون f پیوسته است اگر $f(a)\times f(b)<۰$ باشد، ریشه‌ی معادله درون بازه‌ی $(a\ ,\ b)$ است:

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)<۰ \qquad f\left(\frac{۳}{٤}\right)<۰ \Rightarrow x_{۰}\in\left(\frac{۳}{٤},\frac{۷}{۸}\right)$$

$$f\left(\frac{۱}{٤}\right)<۰ \quad , \quad f(۱)>۰ \quad , \quad f\left(\frac{۷}{۸}\right)>۰$$

۱۲۳- پاسخ گزینه‌ی ۴

$$y=\frac{۱}{\sin^{۲}x\cos^{۲}x} \qquad \left[\frac{\pi}{۱۲},\frac{\pi}{٤}\right]$$

اولاً: تابع در بازه‌ی فوق ریشه ندارد.

ثانیاً:

$$S=\int_{\frac{\pi}{۱۲}}^{\frac{\pi}{٤}}\frac{۱}{\sin^{۲}x\cos^{۲}x}dx=٤\int_{\frac{\pi}{۱۲}}^{\frac{\pi}{٤}}\frac{۱}{\sin^{۲}۲x}dx=٤\int_{\frac{\pi}{۱۲}}^{\frac{\pi}{٤}}(۱+\cot^{۲}۲x)dx$$

$$\sin^{۲}x\cos^{۲}x=(\sin x\cos x)^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right)^{۲}=\frac{۱}{٤}\sin^{۲}۲x$$

$$\int u'(۱+\cot^{۲}u)=-\cot u+c$$

$$=-۲\int_{\frac{\pi}{۱۲}}^{\frac{\pi}{٤}}\underbrace{-۲}_{u'}(۱+\cot^{۲}\underbrace{۲x}_{u})dx=-۲\cot ۲x\Big]_{\frac{\pi}{۱۲}}^{\frac{\pi}{٤}}=-۲\left(\cot\frac{\pi}{۲}-\cot\frac{\pi}{٦}\right)=-۲(۰-\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}$$

۱۲۴- پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_{۰}^{۱}f(x)dx$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{i}{n^{۳}}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{i}{n\times n^{۲}}}=\underset{n\to+\infty}{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_{۰}^{۱}\sqrt{x}dx=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\Big]_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}$$

آزادبه فرزان