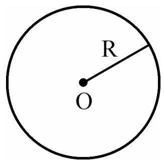
فصل دوم

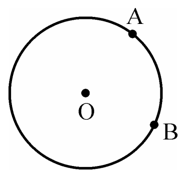
دایره

فصل «دایره» بعد از فصل «استدلال در هندسه» از نظر تعداد تست در کنکور، رتبه‌ی دوم را دارد. برخلاف فصل قبل، انسجام مطلب و سادگی تشخیص روش‌حل تست، از ویژگی‌های خوب تست‌های دایره در کنکور است.

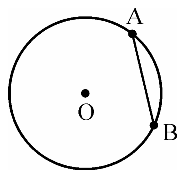
دایره و تعاریف اولیه



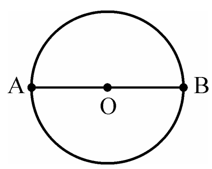
دایره: دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از نقطه‌ی ثابتی در همان صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه‌ی ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گویند. $C(O\,,\,R)$ نشان‌دهنده‌ی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



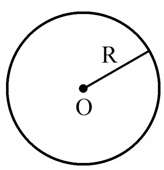
کمان: کمان قسمتی از محیط دایره است که بین دو نقطه‌ی ثابت از محیط قرار دارد؛ مثل $\overset{\frown}{AB}$



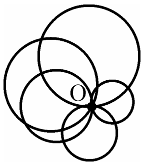
وتر: وتر پاره‌خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند؛ مثل وتر AB



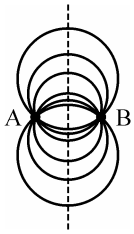
قطر: قطر وتری از دایره است که از مرکز دایره می‌گذرد و بزرگ‌ترین وتر دایره می‌باشد.



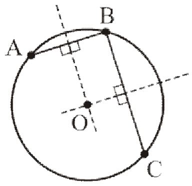
شعاع: شعاع پاره‌خطی است که مرکز دایره را به یک نقطه از محیط دایره وصل می‌کند؛ (آن را با R نمایش می‌دهند.)



از یک نقطه، بی‌شمار دایره می‌گذرد.



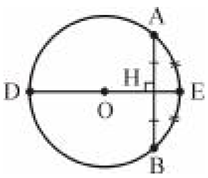
از دو نقطه‌ی A و B بی‌شمار دایره می‌گذرد و مکان هندسی مرکز این دایره‌ها، خط عمودمنصف پاره‌خط AB است.



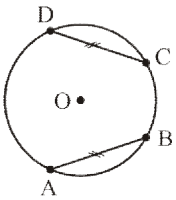
از هر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط، یک دایره می‌گذرد. که مرکز آن، نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث تشکیل‌شده با آن سه نقطه می‌باشد و شعاع آن برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره، تا یکی از آن سه نقطه.

چند قضیه‌ی مهم

قضیه‌ی ۱: در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند و خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است و برعکس. یعنی داریم:

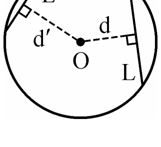


$$\begin{cases} \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ AH = HB \end{cases} \Leftrightarrow \quad OH \perp AB$$



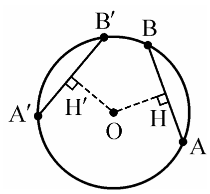
قضیه‌ی ۲: در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس. یعنی داریم:

$$AB = CD \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



قضیه‌ی ۳: در یک دایره، از دو وتر نابرابر؛ آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس یعنی داریم:

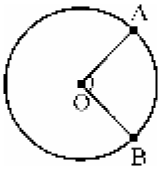
$$L > L' \quad \Leftrightarrow \quad d < d'$$



نتیجه‌ی قضیه: در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. یعنی داریم:

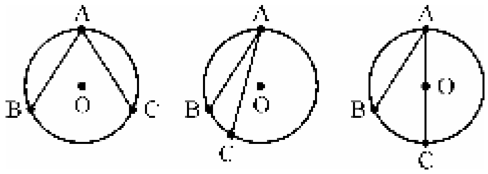
$$AB = A'B' \quad \Leftrightarrow \quad OH = OH'$$

زاویه‌های اصلی در دایره



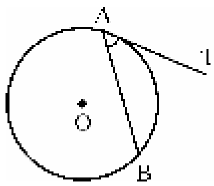
زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند.

– اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی برابر با اندازه‌ی کمان مقابلش است: $\widehat{AOB}=\widehat{AB}$



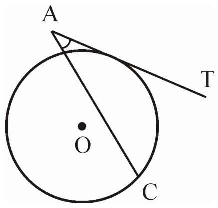
زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ای است که رأسش روی محیط دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره باشند.

– اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان مقابلش است: $\widehat{BAC}=\frac{\widehat{BC}}{۲}$

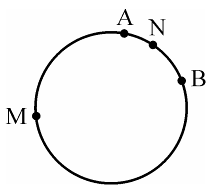


زاویه‌ی ظلی: زاویه‌ی ظلی زاویه‌ای است که رأسش روی محیط دایره است، یک ضلعش وتری از دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است. مانند $\widehat{TAB}$ در شکل روبه‌رو:

– اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی نصف کمان مقابلش است: $\widehat{TAB}=\frac{\widehat{AB}}{۲}$



با توجه به تعریف زاویه‌ی ظلی، $\widehat{TAC}$ در شکل مقابل، یک زاویه‌ی ظلی <u>نیست</u>.

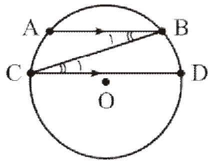


تست: در شکل مقابل، اگر $\widehat{AMB}=۴\widehat{ANB}$، کمان $\widehat{ANB}$ چه کسری از محیط دایره است؟ *(آزاد ریاضی-۸۰)*

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

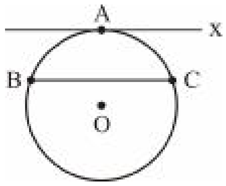
۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

روش حل: محیط دایره $=\widehat{AMB}+\widehat{ANB}\overset{\text{طبق فرض}}{=}۴\widehat{ANB}+\widehat{ANB}=۵\widehat{ANB}\Rightarrow \widehat{ANB}=\frac{۱}{۵}$ محیط دایره



کمان‌های محدود بین دو وتر موازی مساوی‌اند:

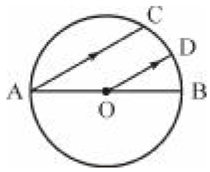
$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$



اثبات: پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{B}_{\text{۱}}=\hat{C}_{\text{۱}}$، پس $\frac{\widehat{AC}}{\text{۲}}=\frac{\widehat{BD}}{\text{۲}}$؛ یعنی: $\widehat{AC}=\widehat{BD}$

حالت خاص: در شکل مقابل $Ax \parallel BC$ و Ax مماس بر دایره است. در این حالت نیز داریم: $\widehat{AB}=\widehat{AC}$

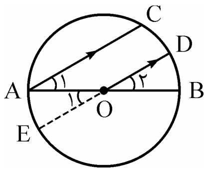
(اثبات این قسمت به‌عهده‌ی شماست!)



تست: در شکل مقابل اگر $AC \parallel OD$ و $\widehat{BD}=$ ۳۰°، آن گاه $\widehat{CD}$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) ۲۰°

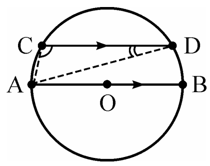


روش حل: شعاع OD را امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در E قطع کند، داریم:

$$AC \parallel ED \Rightarrow \left.\begin{matrix}\widehat{AE}=\widehat{CD}\\ \hat{O}_{\text{۱}}=\widehat{AE}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{O}_{\text{۱}}=\widehat{CD} \xrightarrow{\hat{O}_{\text{۱}}=\hat{O}_{\text{۲}}} \hat{O}_{\text{۲}}=\widehat{CD} \xrightarrow{\hat{O}_{\text{۲}}=\widehat{BD}=\text{۳۰}^\circ} CD=\text{۳۰}^\circ$$

تست: در دایره‌ای به قطر AB، وتر CD موازی قطر AB رسم شده‌است. اندازه‌ی $\widehat{ACD}-\widehat{ADC}$ کدام است؟ *(آزاد ریاضی-۶۵)*

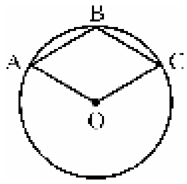
۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°



روش حل:

کمان‌های محصور بین دو قطر موازی مساویند. $\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$ (۱)

$$\widehat{ACD}-\widehat{ADC}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{BD}}{\text{۲}}-\frac{\widehat{AC}}{\text{۲}}\overset{(\text{۱})}{=}\frac{\widehat{AB}+\widehat{BD}}{\text{۲}}-\frac{\widehat{BD}}{\text{۲}}=\frac{\widehat{AB}}{\text{۲}}=\frac{\text{۱۸۰}^\circ}{\text{۲}}=\text{۹۰}^\circ$$



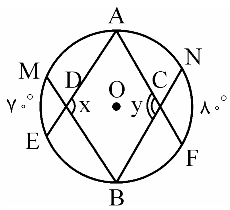
تست: نقطه‌ی O مرکز دایره و چهارضلعی $ABCO$ لوزی است. اندازه‌ی کمان $\widehat{ABC}$ چه‌قدر است؟

۱) ۶۰° ۲) ۹۰°

۳) ۱۲۰° ۴) ۱۸۰°

روش حل: چهارضلعی $ABCO$ لوزی است: $\hat{B}=\hat{O} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{\text{۲}}=\widehat{ABC}$ (۱)

$$\text{محیط دایره}=\widehat{AC}+\widehat{ABC}=\text{۳۶۰}^\circ \overset{(\text{۱})}{\Rightarrow} \text{۲}\widehat{ABC}+\widehat{ABC}=\text{۳۶۰}^\circ \Rightarrow \text{۳}\widehat{ABC}=\text{۳۶۰}^\circ \Rightarrow \widehat{ABC}=\text{۱۲۰}^\circ$$



تست: در شکل مقابل مقدار $\hat{x}+\hat{y}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۰۵° ۲) ۱۵۰°

۳) ۲۱۰° ۴) ۲۵۵°

روش حل:

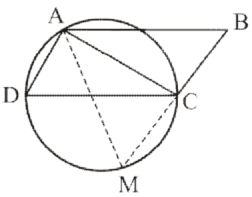
سعی می‌کنیم مقدار $\hat{A}+\hat{B}$ را پیدا و از مجموع زوایای داخلی $ACBD$ یعنی ۳۶۰° کم کنیم، آن‌گاه مقدار $\hat{x}+\hat{y}$ پیدا می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\dfrac{\widehat{EBF}}{۲}\\ \hat{B}=\dfrac{\widehat{MAN}}{۲}\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\ \hat{A}+\hat{B}=\dfrac{\widehat{EBF}+\widehat{MAN}}{۲}$$
$$\widehat{EBF}+\widehat{MAN}=۳۶۰^\circ-(\widehat{ME}+\widehat{NF})=۳۶۰^\circ-۱۵۰^\circ=۲۱۰^\circ$$
$$\Rightarrow\ \hat{A}+\hat{B}=\frac{۲۱۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ$$
$$\Rightarrow\ \hat{x}+\hat{y}=۳۶۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۳۶۰^\circ-۱۰۵^\circ=۲۵۵^\circ$$

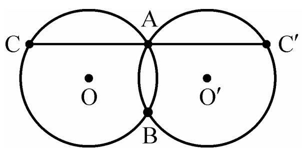
تست: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، دایره‌ی محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی M قطع کرده‌است. مثلث $\overset{\Delta}{ABM}$ کدام نوع است؟ *(سراسری ریاضی-۸۴)*

۱) متشابه با $\overset{\Delta}{ACD}$ ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه

روش حل:

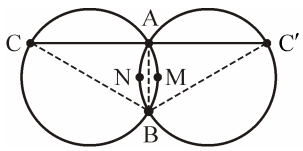


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\dfrac{\widehat{AC}}{۲}\\ \hat{M}=\dfrac{\widehat{AC}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \hat{D}=\hat{M}\quad(۱)\\ ABCD\ \text{متوازی الاضلاع}\ \Rightarrow\ \hat{D}=\hat{B}\quad(۲)\end{array}\right\}\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)}\hat{M}=\hat{B}\ \Rightarrow$$
$\overset{\Delta}{ABM}$ متساوی‌الساقین است.



تست: در شکل مقابل دو دایره‌ی مساوی متقاطعند. قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. مثلث CBC' همواره .... *(آزاد ریاضی-۸۰)*

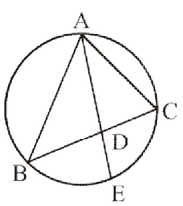
۱) متساوی‌الاضلاع است. ۲) قائم‌الزاویه است.
۳) متساوی‌الساقین است. ۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



روش حل: زاویه‌های C و C' به‌ترتیب روبه‌رو به کمان‌های $\widehat{AMB}$ و $\widehat{ANB}$ هستند. پس با هم برابرند (زیرا این‌دو کمان روبه‌رو به یک وتر یعنی وتر AB هستند)؛ در نتیجه $\overset{\Delta}{CBC'}$ متساوی‌الساقین است.

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

(سؤال: در چه شرایطی این مثلث متساوی‌الاضلاع یا قائم‌الزاویه می‌شود؟)

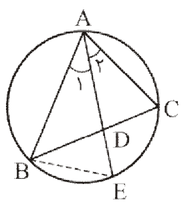


تمرین: اگر AD نیم‌ساز زاویه‌ی A باشد، موارد زیر را با توجه به شکل اثبات کنید.

۱) $\overset{\Delta}{ABE}$ و $\overset{\Delta}{ACD}$ متشابه‌اند. ۲) $AB.AC=AD.AE$
۳) $AD^۲=AB.AC-BD.DC$

روش حل: ابتدا از E به B وصل می‌کنیم. داریم:

اثبات ۱ و ۲:



$$\left.\begin{array}{l}AD:\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\ \text{نیم‌ساز}\\ \hat{C}=\hat{E}=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \boxed{\overset{\Delta}{ABE}\overset{(\text{زز})}{\sim}\overset{\Delta}{ACD}}\ \Rightarrow\ \frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE}\ \Rightarrow\ \boxed{AB.AC=AD.AE}$$

اثبات ۳:

از قسمت قبل داریم: $AB.AC = AD.AE \quad \Rightarrow \quad AB.AC = AD.(AD + DE)$

$$AB.AC = AD^{۲} + (\underbrace{AD.DE}_{BD\times DC \ (۱)}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{AD^{۲} = AB.AC - BD.DC} \quad (۲)$$

(۱) این رابطه کمی جلوتر در قسمت روابط طولی در دایره می‌آموزید.

(۲) این رابطه را در فصل اول در قسمت نیم‌ساز مطرح و راجع‌به کاربرد آن در تست‌ها نیز بحث شده‌است.