جلسه‌ی دوم: گراف

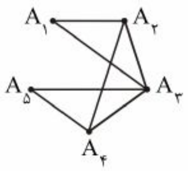
گراف‌های بازه‌ای، Δ و δ، دور و مسیر

خب! رسیدیم به جلسه‌ی دوم، حال شما که خوب است؟ ما هم بد نیستیم! اما در این جلسه اول درباره‌ی گراف بازه‌ها صحبت می‌کنیم، بعد یک کمی با سؤال‌های مربوط به Δ و δ آشنا می‌شویم و مهم‌تر از همه شکل‌های مختلفی که تا به حال از دور و مسیر سؤال آمده‌است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دوباره با یک سؤال آغاز می‌کنیم:

تست ۱: گراف مرتبط با بازه‌های $i=۱,۲,۳,۴,۵$; $A_i=(i-۱\,,\,i+۲)$ چند یال دارد؟

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹

می‌دانیم در گراف‌های بازه‌ای به هر رأس یک بازه‌ی باز از اعداد حقیقی اختصاص داده می‌شود. حال اگر بازه‌های مربوط به دو رأس با هم اشتراک داشت، بین آن دو رأس یال رسم می‌کنیم.

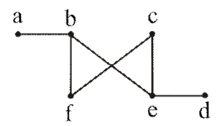


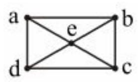
در این سؤال اول بازه‌ها را مشخص می‌کنیم:

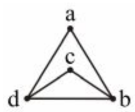
$$A_۱:(۰\,,\,۳)\ ,\ A_۲=(۱\,,\,۴)\ ,\ A_۳=(۲\,,\,۵)\ ,\ A_۴=(۳\,,\,۶)\ ,\ A_۵=(۴\,,\,۷)$$

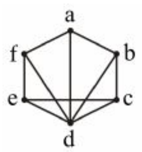
حال کدام بازه‌ها با هم اشتراک دارند؟ همان‌جاها یال رسم می‌کنیم. نگاه کنید: مثلاً بین رأس‌های $A_۱$ و $A_۳$ یال رسم می‌شود چون بازه‌های $(۰\,,\,۳)$ و $(۲\,,\,۵)$ اشتراک دارند. اما بین $A_۲$ و $A_۵$ یال رسم نمی‌کنیم چون $(۱\,,\,۴)$ و $(۴\,,\,۷)$ اشتراک ندارند. به‌همین‌ترتیب اگر گراف را رسم می‌کنیم، می‌بینیم ۷ یال دارد.

تست ۲: کدام‌یک از گراف‌های زیر، گراف بازه‌ها است؟

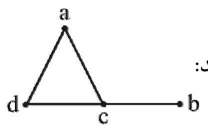
۱) 

۲) 

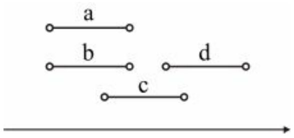
۳) 

۴) 

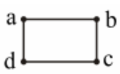
واقعیت این است که این‌جور نیست که هر گرافی ما داشته باشیم بشود برایش بازه پیدا کرد. یعنی الان شما گراف روبه‌رو را نگاه کنید:



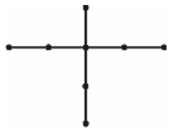
می‌شود بازه‌هایی پیدا کرد که قیافه‌ی گراف مربوط به شبیه شکل بالا شود. مثلاً این‌جوری: می‌بینید که بازه‌ی مربوط به رأس d فقط با بازه‌ی مربوط به رأس c اشتراک دارد ولی a و b و c هر سه با هم اشتراک دارند.



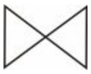
اما برای این یکی گراف، هیچ بازه‌هایی نمی‌شود پیدا کرد. یعنی هیچ چهار بازه‌ی a و b و c و d ای وجود ندارد کـه قیافـه‌ی گـرافش این شکلی شود. (اثباتش آسان است!)



به n ضلعی‌های $(n \geq ۴)$ بدون قطر می‌گویند **حفره**. اگر گرافی شامل حفره بود، گراف بازه‌ها نیست. به‌جز حفره‌ها این دو گراف روبه‌رو هم یادتان باشد که گراف بازه‌ها نیستند:




حالا برویم سراغ سؤال خودمان، کدام یک از شکل‌ها حفره ندارد؟ انگار هیچ‌کدامشان ندارند، اما اگر خوب نگاه کنید، حفره‌شان که آن وسط مسطحها قایم‌شده را پیدا می‌کنید. در گراف گزینه ۱ چهار ضلعی $b\ f\ c\ e$ قطر ندارد.

حواستان باشد که شکل‌هایی شبیه  **یا هم**  **حفره است.**

در گراف گزینه‌ی ۲ چهار ضلعی $a\ b\ c\ d$ قطر ندارد. در گراف گزینه‌ی ۴ نیز پنج ضلعی $a\ b\ c\ e\ f$ بدون قطر است. گراف داده شده در گزینه‌ی ۳ بازه‌ای است، چون حفره ندارد. چی؟ چهار ضلعی $a\ b\ c\ d$ بدون قطر است؟ نه‌خیر، یال bd قطر آن است، رأس c را بکشید پایین تا ببینید! حالا کمی از سؤال‌های مربوط به Δ و δ حل کنیم. اما پیش از آن مروری بر خبرها!

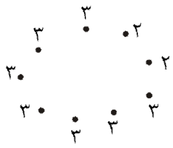
– **میانگین درجه‌های رأس‌های یک گراف برابر است با:** $\dfrac{۲q}{p}$

– **با توجه به این که میانگین تعدادی عدد، بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌هاست، داریم:** $\delta \leq \dfrac{۲q}{p} \leq \Delta$ **اما حواستان باشد از این نامساوی برای پیداکردن حدود یال‌ها استفاده نکنید، چون حدود دقیق به شما نمی‌دهد.**

تست ۳: در گرافی از مرتبه‌ی ۹ می‌دانیم $\delta = ۲$ و فقط دو رأس گراف از درجه‌ی ۲ است. اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین تعداد یال‌های این گراف چند است؟

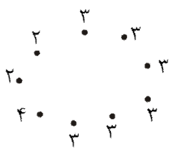
۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

اول برویم سراغ پیدا کردن کم‌ترین تعداد یال. ۹ رأس داریم که دوتای آن حتماً باید از درجه‌ی ۲ باشد از طرف دیگر می‌دانیم هرچه درجه‌های رأس کم‌تر باشد، تعداد یال‌ها کم‌تر می‌شود، بنابراین تلاش می‌کنیم به رأس‌ها درجه‌های کوچک‌تر نسبت دهیم. این‌طوری

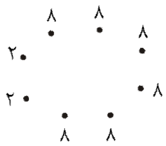


اما چون الان تعداد رأس‌های فرد، فرد است و چنین گرافی وجود ندارد، درجه‌ی یکی از رأس‌ها را می‌کنیم ۴. داریم:

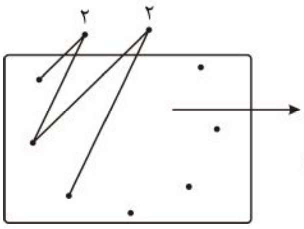
$$۲q = ۲\times۲ + ۶\times۳ + ۴ \Rightarrow q_{min} = ۱۳$$



اما برای پیدا کردن q_{max} نمی‌شود این کار را کرد، چون اگر به رأس‌ها این مدلی عدد بدهیم گراف اصلاً رسم نمی‌شود. نگاه کنید:



علتش این است که وقتی ۶ رأس از درجه‌ی ماکزیمم داریم دیگر نمی‌شود رأس درجه‌ی ۲ داشت.



$$q_{(k_7)} = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$$

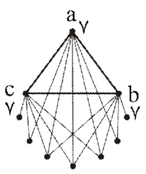
$$q_{max} = ۲۱ + ۲ + ۲ = ۲۵$$

پس چه‌کار باید بکنیم؟ ابتدا دو رأس از درجه‌ی ۲ را می‌گذاریم کنار، از بقیه‌ی رأس‌ها هرچه‌قدر می‌توانیم یال می‌گذرانیم (گراف کامل درست می‌کنیم.) بعد شرط مربوط به آن دو رأس را لحاظ می‌کنیم.

اختلاف حداکثر و حداقل تعداد یال‌ها برابر است با: $۲۵ - ۱۳ = ۱۲$

تست ۴: در گرافی از مرتبه‌ی ۱۰ می‌دانیم $\Delta = ۷$ و سه رأس گراف از درجه‌ی ۷ است. این گراف دست‌کم چند یال دارد؟

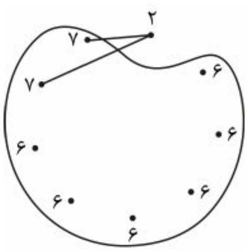
۱) ۱۸   ۲) ۱۹   ۳) ۲۰   ۴) ۲۱



سه رأس داریم که از هر کدام از آن‌ها باید ۷ یال بگذرد، پس به نظر می‌رسد باید دست‌کم $۲۱ = ۳ \times ۷$ یال داشته باشیم. اما می‌شود یک کاری کرد که در مصرف یال صرفه‌جویی کرد! چه‌جوری؟ این‌جوری که رأس‌هایی را که می‌خواهیم درجه‌شان ۷ شود را به‌هم وصل کنیم. خُب حالا حساب کنید. چند تا یال دوبار حساب شده‌اند. کدام‌ها؟ آن‌هایی که بین این سه رأس درجه‌ی ۷ هستند. مثلاً یال ab را نگاه کنید. این یک یال است، اما یک‌بار جزو یال‌هایی که از a گذشته حساب‌شده و یک‌بار هم جزو یال‌هایی که از b گذشته است. حالا چندتا از این یال‌هایی که دوبار حساب شده داریم؟ بله، ۳ تا. در نتیجه: $۱۸ = ۳ - ۲۱$

تست ۵: گرافی دارای هشت رأس و بیست و سه یال است، بیش‌ترین مقدار $\Delta - \delta$ کدام است؟ *(آزاد- ۸۱)*

۱) ۵   ۲) ۱   ۳) ۳   ۴) ۶



اگر بخواهیم $\Delta - \delta$ زیادترین مقدار ممکن را بگیرد، Δ باید تا جایی که می‌شود زیاد شود و δ تا جایی که می‌شود کم. بیش‌ترین مقدار برای Δ که برابر ۷ است. چرا؟ خب چون وقتی ۸ رأس داریم، نهایتاً از یک رأس ۷ یال می‌توانیم بگذارنیم دیگر! اما برای کوچک شدن δ چه کنیم؟ یک رأس را کنار می‌گذاریم برای آن‌که اگر بشود به آن یالی وصل نکنیم که درجه‌اش بشود صفر. اما وقتی این‌کار را می‌کنیم، می‌بینیم از ۷ رأس دیگر حداکثر ۲۱ یال می‌توانیم بگذرانیم (تعداد یال‌های $k_۷$) بنابراین ناچاریم دو یال هم از این رأس کنار گذاشته‌شده، بگذرانیم، یعنی $\delta_{min} = ۲$، درجه‌ی رأس‌های گراف این‌جوری می‌شود. $\max(\Delta - \delta) = ۷ - ۲ = ۵$

تست ۶: در گرافی درجه‌ی بیش‌ترین رأس ۷ و تعداد یال‌های ۵۰ تا است. این گراف دست‌کم چند رأس دارد؟

۱) ۱۱   ۲) ۱۳   ۳) ۱۴   ۴) ۱۵

آن نامساوی را که گفتم برای پیدا کردن تعداد یال‌ها از آن استفاده نکنید، یادتان هست؟ این‌جا می‌توانید از آن استفاده بکنید:

$$\frac{۲q}{p} \le \Delta \Rightarrow \frac{۱۰۰}{p} \le ۷ \Rightarrow p \ge \frac{۱۰۰}{۷} = ۱۴/۲ \Rightarrow p_{min} = ۱۵$$

فقط حواس‌تان باشد در این مدل سؤال‌ها گاهی عددی که برای رأس‌ها به‌دست می‌آید، قابل‌قبول نیست. مثلاً اگر بگوید در گرافی $\Delta = ۱۱$ و تعداد یال‌ها ۳۰ تا است داریم:

$$\frac{۲q}{p} \le \Delta \Rightarrow \frac{۶۰}{p} \le ۱۱ \Rightarrow p \ge ۵/۵ \Rightarrow p_{min} = ۶$$

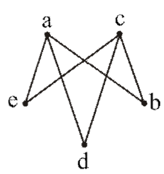
واضح است که رأس‌ها نمی‌شود که ۶ تا باشد چون رأس از مرتبه‌ی ۱۱ داریم، بنابراین این‌جا حداقل تعداد رأس‌ها می‌شود ۱۲. توجه کنید مدل‌های مختلف زیادی از سؤال‌های δ و Δ وجود دارد، اما با توجه به این‌که تا به‌حال در این مدل سؤال‌ها در کنکور سراسری نیامده و در آزاد هم تعداد محدودی آمده است به همین حد کفایت می‌کنیم.

خُب، حالا برویم سراغ سؤال‌های دور و مسیر. این مدل سؤال‌ها دو نوع‌اند. در نوع اول این سؤال‌ها تعداد دور و مسیرها در گراف‌های عادی خواسته می‌شود که راه خاصی ندارد و فقط باید با رسم شکل و استدلال کردن تعداد آن‌ها را پیدا کنیم و در نوع دوم تعداد دور و مسیرها در گراف‌های کامل خواسته می‌شود که با رابطه‌هایی می‌شود تعداد آن‌ها را فهمید. برویم جلو ببینیم به کجا می‌رسیم.

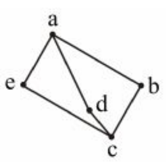
تست ۷: در گراف G با درجه رأس‌های ۲، ۲، ۲، ۳، ۳ دو رأس با ماکسیمم درجه غیرمجاورند. تعداد دورهای به طول ۴ کدام است؟ *(سراسری-۸۱)*

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) صفر

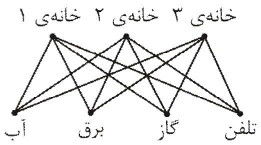
یعنی دو رأس درجه‌ی ۳ را نباید به هم وصل‌کنیم. شکل این‌جوری می‌شود:



تشخیص دور در این‌جور گراف‌ها که خط‌های زیادی هم دیگر را قطع کرده‌اند، سخت است. شکل را ساده می‌کنیم. این‌جوری که یکی از رأس‌های درجه‌ی ۳ را می‌آوریم پایین.

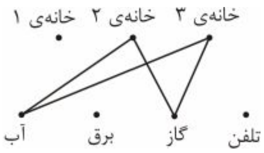


حالا بهتر شد. می‌بینیم گراف ۳ دور به طول ۴ دارد. a b c e a , a b c d a , a d c e a



تست ۸: سه خانه را هرکدام به‌طور جداگانه به مرکزهای آب، برق، گاز و تلفن وصل می‌کنیم. گراف به‌وجود آمده، چند دور به طول ۴ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴



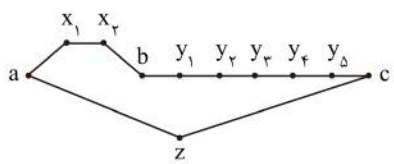
برای داشتن یک دور به طول چهار باید دوتا از خانه‌ها و دوتا از مرکز را انتخاب کرد مثلاً اگر خانه‌های ۲ و ۳ و مراکز آب و گاز را درنظر بگیریم این دور به‌وجود می‌آید:

حالا به چند طریق می‌توان دوتا از سه‌تا خانه‌ها و ۲ تا از ۴ مرکز را انتخاب کرد. واضح است: $\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۲}=۳\times۶=۱۸$

تست ۹: اگر فاصله‌ی دو رأس a و b برابر ۳ و فاصله‌ی ۲ رأس b و c برابر ۶ باشد فاصله‌ی دو رأس a و c برابر کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۰

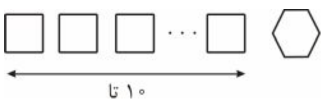
می‌دانیم فاصله‌ی دو رأس یعنی طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس.



با توجه به داده‌های سؤال چنین شکلی قابل تصور است. و از طرف دیگری می‌دانیم نباید بین a و b مسیری به طول کم‌تر از ۳ و بین c و b مسیری به طول کم‌تر از ۶ باشد، چون دراین‌صورت فرض سؤال نقض می‌شود. در همین شکل الان از a به c یک مسیر به طول ۹ وجود دارد، پس گزینه‌ی ۴ رد می‌شود. هم‌چنین گزینه‌های ۱ و ۲ را نیز می‌شود رد کرد، چون اگر مثلاً فاصله‌ی دو رأس c و a برابر ۲ باشد، یعنی دست‌کم یک مسیر به طول ۲ از a به c وجود دارد. دراین‌صورت دیگر فاصله‌ی c و b برابر ۶ نیست، چراکه الان طول مسیر $c\,z\,a\,x_1\,x_2\,b$ برابر ۵ است درصورتی‌که در سؤال داشتیم فاصله‌ی این دو رأس ۶ است.

تست ۱۰: گرافی با ۴۵ رأس درجه‌ی ۲ حداکثر چند دور به طول چهار دارد؟ *(آزاد-۸۸)*

۱) ۱۱ ۲) ۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

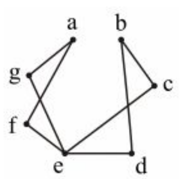


برای این‌که دورهای به طول ۴ ما بیش‌تر شود، باید تا می‌توانیم شکل‌هایی شبیه مربع کنار هم بچینیم. (چون هر مربع یک دور به طول ۴ است و درجه‌ی هر رأس آن ۲ است.) اما نمی‌شود ۱۱ تا مربع درست کرد با ۴۵ رأس چون یک رأس ایزوله می‌شود و دیگر از درجه‌ی ۲ نیست. پس چه‌کار کنیم؟ ۱۰ تا مربع درست می‌کنیم و یک پنج‌ضلعی:

خب! نمونه‌های مختلفی از سؤال‌های دور در گراف‌های غیرکامل دیدید. می‌بینید که سؤال‌های زیادی از این بحث در کنکور آمده است. حال برویم چند تا سؤال از دور و مسیر و گراف کامل حل کنیم.

تست ۱۱: در گراف k_7 از رأس a به b چند مسیر به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

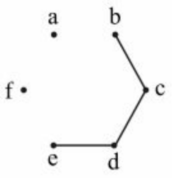


خوبی گراف‌های کامل این است که همه جایش یال هست! اول یکی دوتا مسیر به طول ۴ از a به b به شما نشان می‌دهم. این: a g e c b یا این: a f e d b می‌بینیم که در این مسیرها و بقیه‌ی مسیرهای به طول ۴ از a به b رأس اول همیشه a رأس آخر همیشه b است و سه رأس وسط می‌توانند عوض شوند و به‌ازای هر تغییری یک مسیر جدید به‌وجود می‌آید. پس این‌جوری می‌شود. b ۳ ۴ ۵ a

رأس اول هرکدام از پنج رأس باقی‌مانده (a، b که اول و آخرند.) می‌تواند باشد برای رأس دوم ۴ انتخاب داریم و برای رأس سوم ۳ انتخاب، پس کل حالات می‌شود ۶۰ تا.

تست ۱۲: در گراف k_6 چند مسیر به طول ۳ وجود دارد با این شرط که در هیچ‌کدام از این مسیرها رأس a وجودنداشته‌باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

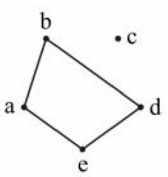


می‌خواهیم مسیرهای به طول سه‌ای را در k_6 پیدا کنیم که در هیچ‌کدام از آن‌ها رأس a وجودنداشته‌باشد مثلاً یک چیزی مثل این: اما اسم این مسیر چیست؟ b c d e یا e d c b

طبیعی است که هر دو. یعنی این مسیر دو نام مختلف دارد. حالا چندتا از این مسیرها هست؟ ببینید چون اول و آخر رأس‌ها معلوم نیست می‌شود هرکدام از رأس‌ها را برای اول و آخر هم درنظرگرفت. یعنی اگر بخواهیم یک مسیر به طول ۳ مثل بالا داشته‌باشیم باید چهار رأس را انتخاب کنیم. ۲ ۳ ۴ ۵ رأس اول هرکدام از رأس‌ها می‌تواند باشد به جز a (چون خودش گفته a نباشد.) پس برای رأس اول ۵ انتخاب داریم، همین‌طور برای رأس دوم ۴ انتخاب و برای رأس سوم ۳ انتخاب و برای رأس چهارم ۲ انتخاب. فقط دقت کنید که هر مسیری دارد دوبار حساب می‌شود، بنابراین جواب نهایی را باید به ۲ تقسیم کنیم، داریم: $\frac{5\times4\times3\times2}{2}=60$

تست ۱۳: در یک گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ چند دور با طول ۴ وجود دارد؟ *(سراسری-۸۷)*

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰



قبل از این‌که تعداد دورها را حساب کنیم چندتا است، اول ببینیم هر دور به طول ۴ را چند جور می‌شود اسم‌گذاری کرد. مثلاً همین دور روبه‌رو را نگاه کنید، این دور به نظرتان چندتا اسم دارد؟ یکی مثلاً a b d e a. خب! این‌جوری می‌شود گفت که از هر کدام از رأس‌ها که بخواهیم می‌توانیم شروع کنیم و در دو جهت اسم‌گذاری می‌کنیم: جهت عقربه‌های ساعت و خلاف جهت عقربه‌های ساعت. بنابراین a b d e a یعنی از رأس a شروع کردیم در جهت عقربه‌های ساعت و a e d b a شروع شده از رأس a است در خلاف جهت عقربه‌های ساعت. بنابراین به‌همین‌ترتیب می‌توان این دور را به ۸ روش نام‌گذاری کرد.

یک دور به طول m را به 2m طریق می‌توان نام‌گذاری کرد.

حالا برای داشتن یک دور به طول چهار باید چهار رأس داشته‌باشیم: ۲ ۳ ۴ ۵ رأس اول را به ۵ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم، رأس دوم را به ۴ طریق و به همین ترتیب و حالا برای این‌که هر دوری ۸ بار حساب شده جواب را باید به ۸ تقسیم کنیم: $\frac{5\times4\times3\times2}{8}=15$

دقت کنید. مثلاً اگر دورهای به طول ۵ خواسته‌شده‌بود، مخرج را ۱۰ می‌گذاشتیم.

تست ۱۴: در گرافی با رئوس a، b، c، d، e و درجه‌های رئوس {۳ , ۳ , ۴ , ۴ , ۴} چند دور به طول ۳ وجود دارد؟ *(آزاد-۸۴)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۴

درجه‌های رأس‌های گراف کامل مرتبه‌ی ۵ چیست؟ ۴، ۴، ۴، ۴، ۴ حالا یک نگاهی به درجه‌ی رأس‌های گرافی که در سؤال داده‌شده نگاه کنید، معلوم است این گراف از k_5 یک یال کم‌تر دارد. حالا برای پیدا کردن تعداد دورهای این گراف، اول تعداد دورهای به طول ۳ گراف کامل مرتبه‌ی ۵ را پیدا می‌کنیم، بعد بررسی می‌کنیم این یک یالی که گراف کم‌تر دارد، چه‌قدر از آن دورهای به طول ۳ را از بین می‌برد. برویم سراغ حساب و کتاب: برای داشتن یک دور به طول ۳ باید ۳ رأس انتخاب کنیم و از طرف دیگر یادمان هست که هر دور به طول ۳ دارای ۶ نام مختلف است. یعنی جواب آخر را باید تقسیم به ۶ کنیم. داریم: $\frac{\boxed{5}\,\boxed{4}\,\boxed{3}}{6}=10$ یعنی k_5 دارای ۱۰ دور به طول ۳ است. حالا یک یال را برمی‌داریم تا ببینیم چند تا از این دورهای به طول ۳ کم می‌شود. می‌بینیم که ۳ تا از این دورهای به طول ۳ با برداشته‌شدن یک یال (که به‌صورت نقطه‌چین نشان دادیم.) خراب شده‌است. بنابراین ۷ تا از این دورها باقی‌می‌ماند.

جلسه‌ی دوم هم تمام شد. یک کم طولانی شد این جلسه. امیدوارم خسته نشده‌باشید و یادتان باشد باید به‌جز این‌ها باز تست بزنید.

پاسخ کلیدی

۱– ۲	۲– ۳	۳– ۲	۴– ۱
۵– ۱	۶– ۴	۷– ۱	۸– ۳
۹– ۳	۱۰– ۴	۱۱– ۳	۱۲– ۳
۱۳– ۳	۱۴– ۲		

با یک وبلاگ:

همه فکر می‌کنند از من بزرگ‌تر است. اما نیست. خواهر کوچیکه است. دست‌هاش از من کوچک‌تر است، کف دست‌هاش، اما قدش بلندتر است. شانه‌هاش عریض‌تر است. مثل نود و نه درصد دخترها، پاهاش از من لاغرتر است. موهای صاف مشکی دارد ... بی‌شباهت به خیلی از آدم‌ها، بی‌اندازه مهربان است. بی‌شباهت به من، چیزی نمی‌نویسد، زندگی‌اش تمامن واقعی‌ست، مجازی ندارد ... بهنوش به معنی واقعی ساده، ساده است. می‌شود دست‌ش انداخت. ولی ردخور ندارد، هربار جای این که بخندی حال‌ت از خودت به هم می‌خورد. بهنوش را دست بیندازی خودت خراب می‌شوی. خودت می‌گندی. ادبیات انگلیسی خوانده، تمام کرده، رها کرده. می‌گوید تا این‌جاش خوب بود اما از ادامه‌اش خوش‌ش نمی‌آید. زندگی‌اش نظم ندارد. چهارده سال است که پیانو می‌زند. پنج سال است ویلون می‌زند. همه می‌گفتند هیچ کاری را این‌طوری نمی‌شود پیش برد. اتاق‌ش فاجعه است. توی همان فاجعه زندگی را پیش برده. پیش‌تر از ما سه‌تای دیگر. صدای ساز می‌دهد. دست‌هاش همیشه روی پاش دارد پیانو می‌زند. عصبی‌ام می‌کند. دست‌ش را می‌گیرم که نزن. باز می‌زند. بهنوش تمام تابستان‌های من است. بچه بود با هم شنا می‌کردیم. استخر داشتیم. بابای ما خیلی به ما سخت می‌گرفت، زندگی ما خیلی بد بود ولی به جاش استخر داشتیم. تابستان‌ها مثل زغال بودیم. سرشانه‌هامان همیشه داشت پوست می‌انداخت. از روشنی صبح تا تاریکی شب توی آب بودیم. کل تیر و مرداد و شهریور. باهاش می‌توانم بچگی را مرور کنم. دوست ندارم مرور کنم. اما اگر روزی خواسته باشم، تنها کسی که می‌داند چی گذشت بهنوش است. تنها کسی که نباید به‌ش ثابت کرد، نباید برای‌ش جمله ساخت و فقط یک یادت هست برای‌ش کافی‌ست، بهنوش است. با من فرق می‌کند. زیاد. بلند می‌خندد. کلن آدم بلندی است. زندگی‌اش دیده می‌شود. یک نقطه‌ی ثابت گوشه‌ی اتاق‌ش نیست. توی هال است. روی پله‌هاست. با مامان دعوا می‌کند. توی آش‌پزخانه است. دم در است. محکم دست می‌دهد. نجات غریق است. کلی برای‌ش توی آب مرده‌ام تا نجات غریق شده. اما کارت‌ش را معلوم نیست کجا انداخته. فعلن برای ما نجات‌غریق است. برای بقیه نیست. کلن برای بقیه نیست. برای خودش است. آش‌پزی دوست دارد. همیشه یک عالم مجله‌ی آش‌پزی تو فاجعه‌ی اتاق‌ش ریخته. از لابه‌لای همان‌ها گاهی برای ما غذاهای شور می‌پزد. گاهی تند. اما بی‌مزه هیچ‌وقت. من این یک سال را نمی‌دانم ولی تا پارسال شب‌ها تا دیر وقت بیرون بود. بابا می‌رفت دم در می‌نشست تا بیاید. بابا یک‌جور عشق به بهنوش دارد. خیلی داد زده‌اند سر هم. اما هم‌دیگر را دوست دارند. گاهی ما ترک بابا می‌کردیم. با مامان می‌رفتیم. اما بهنوش همیشه می‌ماند.

بابای من تنهاست. خواهر و برادر ندارد. چند تا فامیل ناتنی دارد که توی تهران و تبریز پخش‌اند. مشهد هیچ‌کس را ندارد. بابا جراح است. متخصص ریه است. گفتن ندارد که سیگاری‌ست. با چهل سال سابقه‌ی درخشان وینستون قرمز. بابا برعکس است. مقابل است. روبه‌روست. گاهی روبه‌روی خودش حتا. می‌توانست جای خواهر و برادر دوست‌های هم‌کار داشته باشد. ندارد. با همه یک‌جوری یک‌جایی بحث‌ش شده. جمعه‌ها را ترجیح و دستور می‌داد بنشینیم خانه کتاب بخوانیم. ما نمی‌خواندیم. او می‌خواند. با سواد بود. توی کنگره‌ها دوست‌های بیش‌تری از دست می‌داد. توی اتاق‌عمل سر کمک‌ها داد می‌کشید. پر از دافعه بود. یک عده دوست داشت که با آن‌ها می‌نوشید. آن‌ها پیر شدند و دندان‌هاشان ریخت. بابا تنهاتر شد. حالا پارازیت که می‌اندازند، برنامه‌ی مورد علاقه‌اش که قطع می‌شود، دیگر هیچ‌چیز ندارد. با استکان چایی‌اش می‌نشیند به صفحه‌ی خالی تلویزیون نگاه می‌کند. این خیلی درد داشت نوشتن‌ش. ماها را اذیت کرده. حق داریم اگر دوست‌ش نداشته باشیم. اما داریم. دست کی است؟ دست خودمان که نیست. این سال آخر می‌دیدم‌ش که می‌رود از ده تا دوازده می‌نشیند دم در. منتظر بهنوش. فقط روی بهنوش‌اش پارازیت نیافتاده بود. که افتاد.

بهنوش آمده این‌جا ویزاش را بگیرد. مامان زنگ زده، که بهنوش نشنود ... یک حرفی می‌زنم، بهنوش نشنود ... بابات نشسته گوشه‌ی هال گریه می‌کند. بعد مامان خودش گریه می‌کند. برای بابام. برای بابام گریه می‌کند. شما نمی‌دانید چه‌قدر عجیب است، دردناک است، که مامان‌م برای بابام گریه کند. که بابام برای بهنوش گریه کند. که اصلن بابام گریه کند. تصویرش دیوانه‌ام می‌کند. تصویر خانه‌ای که از بهنوش خالی‌ست، با غذاهای کم مزه، با صداهای آرام، با اتاق‌های تمیز. با بابای بی‌نهایت تنها، پشت تلویزیون بی‌تصویر، پشت دری که بهنوش‌ش برنمی‌گردد.

«از وبلاگ بهناز میم»

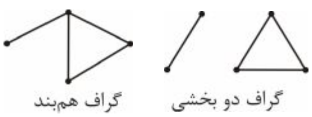
جلسه‌ی سوم: گراف

گراف‌های هم‌بند، همیلتنی، اویلری و درخت

در این جلسه درباره‌ی گراف‌های هم‌بند، اویلری، همیلتنی و بالاخره درخت صحبت می‌کنیم. می‌بینید که کار زیاد داریم، پس بهتر است زودتر شروع کنیم.

تست ۱: گرافی که دنباله درجه‌ی رأس‌هایش ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۳ باشد، چگونه است؟ *(سراسری-۸۰)*

۱) قطعی دارای دور　　۲) درخت　　۳) هم‌بند　　۴) ناهم‌بند



- به گرافی می‌گویند گراف هم‌بند که بین هر دو رأس دل‌خواه آن یک مسیر باشد. (دقت کنید مسیر و نه یال) به بیان دیگر گراف هم‌بند یک‌پارچه است و بخش‌بخش نیست. اگر گراف ناهم‌بند باشد، از چند بخش تشکیل‌شده‌است.

- حداقل تعداد یال‌های یک گراف هم‌بند از مرتبه‌ی p برابر است با $p-1$ که به چنین گرافی درخت می‌گویند و کمی جلوتر در همین جلسه به‌طور مفصل درباره‌ی آن توضیح می‌دهیم.

- حداکثر تعداد یال‌های یک گراف ناهم‌بند زمانی است که یک رأس ایزوله باشد و با بقیه‌ی رأس‌ها گراف کامل درست کنیم که می‌شود: $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$

به‌طورکلی در یک گراف از مرتبه‌ی p وضعیت هم‌بند یا ناهم‌بند بودن گراف را از جدول زیر می‌توان فهمید.

$0 \le q \le p-2 \quad \Rightarrow$ **گراف حتماً ناهم‌بند است.**

$p-1 \le q \le \frac{(p-1)(p-2)}{2} \quad \Rightarrow$ **بسته به نحوه‌ی قرارگرفتن یال‌های گراف، گراف ممکن است هم‌بند یا ناهم‌بند باشد.**

$\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1 \le q \le \frac{p(p-1)}{2} \quad \Rightarrow$ **گراف حتماً هم‌بند است.**

حالا ببینیم وضعیت این گراف چه‌گونه است.

$$2q = 3+2+2+1+1+1+1+1 = 12 \quad \Rightarrow \quad q = 6$$

با توجه به این‌که گراف ۸ رأس دارد، بنابراین حتماً ناهم‌بند است.

تست ۲: گرافی هم‌بند از مرتبه‌ی هفت بیش از یک دور دارد. این گراف دست‌کم چند یال دارد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

خب، اگر گراف بخواهد هم‌بند باشد باید دست‌کم ۶ یال داشته‌باشد. اما گراف‌های هم‌بند ۷ رأس و ۶ یاله دور ندارند. به‌طورکلی: