فصل چهارم

مشتق ۱

مفاهیم اولیه‌ی مشتق

تعریف مشتق: برای تابع f که در همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده‌است، اگر حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته‌باشد، می‌گویند f در a مشتق پذیر است و حاصل این حد را مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق‌های راست و چپ

۱- برای تابع f که در بازه‌ای مانند $[a, a+\delta)$ تعریف شده‌است، اگر حد $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته‌باشد، می‌گویند f در a مشتق راست دارد و حاصل این حد را مشتق راست تابع f در a می‌نامند و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

۲- برای تابع f که در بازه‌ای مانند $(a-\delta, a]$ تعریف شده‌است، اگر حد $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته‌باشد، می‌گویند f در a مشتق چپ دارد و حاصل این حد را مشتق چپ تابع f در a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

قضیه: فرض کنید f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده‌است. دراین‌صورت f در a مشتق پذیر است، اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و با هم برابر باشند. دراین‌صورت: $f'(a)=f'_+(a)=f'_-(a)$

اگر $f'_+(a)$ موجود باشد و f در بازه‌ای مانند $(a-\delta, a)$ تعریف نشده‌باشد، f را در a مشتق‌پذیر در نظر می‌گیریم و $f'(a)=f'_+(a)$ فرض می‌شود، این گزاره برای مشتق چپ هم درست است.

رابطه‌ی پیوستگی و مشتق‌پذیری

۱- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است.

۲- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق راست داشته باشد، آن‌گاه f در a پیوستگی راست دارد.

۳- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق چپ داشته باشد، آن‌گاه f در a پیوستگی چپ دارد.

۴- عکس قضایای فوق درست نیست. یعنی ممکن است تابع در نقطه‌ای پیوسته باشد ولی مشتق پذیر نباشد.

۵- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ ناپیوسته باشد، در این صورت در این نقطه مشتق ناپذیر است.

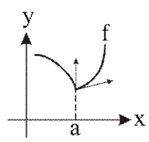
۶- توجه کنید که از مطالب فوق می‌توان فهمید:

الف) پیوستگی تابع f در نقطه‌ی a، شرط لازم برای وجود $f'(a)$ است.

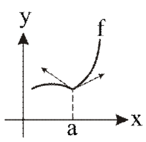
ب) وجود $f'(a)$ شرط کافی برای پیوستگی تابع f در نقطه‌ی a است.

تعریف چند نقطه‌ی مهم

نقطه‌ی زاویه‌دار: نقطه‌ای که تابع در آن نقطه پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ یا دو عدد متفاوت شوند و یا یکی $+\infty$ (یا $-\infty$) و دیگری عدد حقیقی دلخواهی باشد.

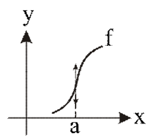


$f'_+(a)$ موجود است و $f'_-(a)=-\infty$

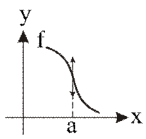


$f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و نابرابرند.

نقطه‌ی مماس قائم: (معمولاً نقطه‌ی عطف نیز هستند.) نقطه‌ای که تابع در آن نقطه پیوسته باشد و $f'(a)$ برابر $+\infty$ و یا $-\infty$ شود.

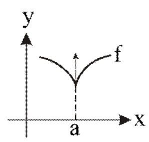


$f'(a)=+\infty$

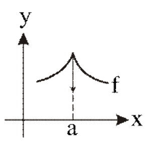


$f'(a)=-\infty$

نقطه‌ی بازگشت: نقطه‌ای که تابع در آن نقطه پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود.



$f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$



$f'_+(a)=-\infty$ و $f'_-(a)=+\infty$

رابطه‌ی وجود مشتق و مماس

۱- اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، خط مماس بر f در نقطه‌ی a، خطی تعریف می‌شود که از نقطه‌ی $M(a, f(a))$ می‌گذرد و شیب آن برابر $f'(a)$ است.

۲- اگر f در a پیوسته باشد و $f'(a)=+\infty$ یا $f'(a)=-\infty$ شود، دراین‌صورت با این‌که تابع مشتق‌پذیر نیست ولی خط مماس بر f در نقطه‌ی a، خط $x=a$ تعریف می‌شود.

۱- اگر $f(x)=\sqrt{۲-\sqrt{۴-x^{۲}}}$ باشد، مقدار $f'_+(۰)-f'_-(۰)$ برابر کدام هستند؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲؛

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-(4-x^2)}}{x\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(0)=\frac{1}{2}\\ f'_-(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

۲- نقطه‌ی $x=1$ برای تابع $f(x)=|x^2-1|$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) زاویه دار ۲) بازگشتی، می‌نیمم ۳) بازگشتی، ماکسیمم ۴) مماس قائم

پاسخ: گزینه‌ی ۱؛

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1||x+1|}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=2\\ f'_-(1)=-2\end{cases}\Rightarrow$$ $x=1$ نقطه‌ی زاویه‌دار

۳- نقطه‌ی $x=0$ برای تابع $f(x)=\sqrt{|\sin x|}$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) زاویه‌دار ۲) بازگشتی، می‌نیمم ۳) بازگشتی، ماکسیمم ۴) مماس قائم

پاسخ: گزینه‌ی ۲؛

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|\sin x|}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x\sqrt{|\sin x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x\sqrt{|\sin x|}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{|\sin x|}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{|\sin x|}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه‌ی بازگشتی است و شکل تابع در همسایگی نقطه‌ی صفر به‌شکل  است.

۴- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ در همسایگی $x=1$ به کدام صورت است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

پاسخ: گزینه‌ی ۱؛

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{0^+}=+\infty$$

پس f در همسایگی $x=1$ صعودی‌اکید است.

فرمول‌های محاسبه‌ی مشتق

اگر u، v و w توابعی از x و مقادیر a، b، c، d و k اعداد حقیقی و m و n اعداد طبیعی باشند، دراین‌صورت:

۱) $y=k \Rightarrow y'=0$

۲) $y=ku \Rightarrow y'=ku'$

۳) $y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$

۴) $y=u+v+w \Rightarrow y'=u'+v'+w'$

۵) $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$

۶) $y=uvw \Rightarrow y'=u'vw+uv'w+uvw'$

۷) $y=\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{-u'}{u^2}$

۸) $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

۹) $y=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\cdot u'$

۱۰) $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

۱۱) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

۱۲) $y=\sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

۱۳) $y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$

۱۴) $y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$

۱۵) $y=\tan u \Rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)$

۱۶) $y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

۱۷) $y=\mathrm{Arcsin}\, u \Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۸) $y=\mathrm{Arccos}\, u \Rightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۹) $y=\mathrm{Arctan}\, u \Rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$

۲۰) $y=\mathrm{Arccot}\, u \Rightarrow y'=\frac{-u'}{1+u^2}$

۲۱) $y=e^u \Rightarrow y'=u'e^u$

۲۲) $y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

۲۳) $y=a^u \Rightarrow y'=u'a^u \ln a$

۲۴) $y=\log_a^u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a}=\frac{u'}{u}\log_a^e$

قضیه: مشتق تابع مرکب: فرض کنید تابع g در a مشتق پذیر و تابع f در نقطه‌ی $g(a)$ مشتق پذیر باشد، دراین‌صورت fog در a مشتق پذیر است و

$$(fog)'(a)=g'(a)\cdot f'(g(a))$$

قضیه‌ی مشتق تابع مرکب برای بیش از دو تابع نیز برقرار است. مثلاً برای سه تابع:

$$F=fogoh \Rightarrow F'(x)=h'(x)\cdot g'(h(x))\cdot f'(g(h(x)))$$

۵- اگر $f(x)=((x^2+1)^2+x)^3$ باشد، $f'(1)$ برابر کدام است؟

۱) ۳۵۰   ۲) ۳۷۵   ۳) ۶۲۵   ۴) ۶۷۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴:

$$f'(x)=3(2(2x)(x^2+1)+1)((x^2+1)^2+x)^2 \Rightarrow f'(1)=3(8+1)(4+1)^2=675$$

۶- اگر $f(x)=\tan^3(\frac{\pi}{9}(2x+\frac{1}{x}))$ باشد، $f'(1)$ برابر کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ: گزینه‌ی ۴؛

$$f'(x)=3\tan^2\left(\frac{\pi}{9}(2x+\frac{1}{x})\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{9}(2x+\frac{1}{x})\right)\right)\left(\frac{\pi}{9}(2-\frac{1}{x^2})\right)$$

$$f'(1)=3\tan^2(\frac{\pi}{3})(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}))(\frac{\pi}{9}(2-1))=3\times3\times(1+3)(\frac{\pi}{9})=4\pi$$

۷- مشتق تابع $y=\log x+\ln x$ برابر $y'=\frac{k}{x}$ است، مقدار k چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

۱) $\log e$ ۲) $\ln 10$ ۳) $\log(10e)$ ۴) $-1+\log e$

پاسخ: گزینه‌ی ۳؛ طبق قضیه‌ی تغییر مبنا در لگاریتم:

$$\log_{10}^{x}=\frac{\log_e^x}{\log_e^{10}}=\log_e^x\cdot\log_{10}^{e}=\ln x\cdot\log e$$

پس ضابطه‌ی تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=(\ln x)\log e+\ln x \Rightarrow f(x)=(1+\log e)\ln x$$

بنابراین:

$$f'(x)=(1+\log e)\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\left(\log 10+\log e\right)\frac{1}{x}=\frac{\log(10e)}{x}$$

۸- اگر $f(x)=x^5(x-1)^4(x+1)^3$ باشد، $f'(2)$ چند برابر 6^4 است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴؛

$$f'(x)=5x^4(x-1)^4(x+1)^3+4(x-1)^3x^5(x+1)^3+3(x+1)^2x^5(x-1)^4$$

$$f'(2)=5\times2^4\times3^3+4\times2^5\times3^3+3\times3^2\times2^5=6^4(\frac{5}{3}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3})=5\times6^4$$

۹- مشتق تابع $y=\frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ در $x=4$ چقدر است؟ (آزاد تجربی ۸۰)

۱) ۵ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{13}{72}$ ۴) $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴؛ ابتدا معادله‌ی تابع را ساده می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+5}(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\sqrt{x(x+5)}} \Rightarrow y=\sqrt{x}+\sqrt{x+5} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

۱۰- اگر $f(x)=\sqrt[3]{(3x+2)^2}$ باشد، $f'(2)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱؛

$$f'(x)=\frac{2}{3}\times3(3x+2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3x+2}} \Rightarrow f'(2)=\frac{2}{\sqrt[3]{8}}=1$$

۱۱- اگر $f(x)=\frac{2\tan x}{3\tan x-1}$ باشد، $f'(\frac{\pi}{4})$ برابر کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

پاسخ: گزینه‌ی ۱؛

$$f'(x)=\frac{(-2-0)(1+\tan^2x)}{(3\tan x-1)^2} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{-2(1+1)}{(3-1)^2}=-1$$

۱۲- اگر $f(x)=(\tan^{۲}\frac{\pi\sqrt{x}}{۲})\sin(\pi x)$ باشد، $f'(\frac{۱}{۴})$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\pi\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۲\pi\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳:

$$f'(x)=۲(\frac{\pi}{۴\sqrt{x}})\tan(\frac{\pi\sqrt{x}}{۲})(۱+\tan^{۲}\frac{\pi\sqrt{x}}{۲})\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x)(\tan^{۲}(\frac{\pi\sqrt{x}}{۲}))$$

$$\Rightarrow\ f'(\frac{۱}{۴})=۲(\frac{\pi}{۲})\tan\frac{\pi}{۴}(۱+\tan^{۲}\frac{\pi}{۴})\sin\frac{\pi}{۴}+\pi\cos\frac{\pi}{۴}\times\tan^{۲}(\frac{\pi}{۴})=\pi\sqrt{۲}+\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\frac{x^{۲}+\sin^{۲}x+۲x\sin x}{x+۱}$، آن‌گاه $۲ff'g+g'f^{۲}$ به ازای $x=۱$ کدام است؟ (آزاد ریاضی عصر ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲: ابتدا توجه می‌کنیم که $۲ff'g+g'f^{۲}$ مشتق $f^{۲}g$ است. زیرا:

$$\left(f^{۲}g\right)'=\left(f^{۲}\right)'g+g'f^{۲}=۲ff'g+g'f^{۲}$$

بنابراین:

$$h(x)=f^{۲}(x)g(x)=\frac{x}{(x+\sin x)^{۲}}\cdot\frac{(x+\sin x)^{۲}}{x+۱}=\frac{x}{x+۱}\ \Rightarrow\ h'(x)=\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}\ \Rightarrow\ h'(۱)=\frac{۱}{۴}$$

۱۴- اگر $f'(۱۰)=۵$ و $g(x)=f(x^{۲}+۱)+f(۴x-۲)$ باشد، $g'(۳)$ برابر کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳:

$$g'(x)=۲xf'(x^{۲}+۱)+۴f'(۴x-۲)\ \Rightarrow\ g'(۳)=۶f'(۱۰)+۴f'(۱۰)=۱۰f'(۱۰)=۵۰$$

۱۵- اگر $f'(x)=\frac{(x+۲)^{۲}}{x-۱}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=f(\sqrt{x})$ در $x=۴$ برابر کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳:

$$g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\ \Rightarrow\ g'(۴)=\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۶}{۱}=۴$$

قضیه‌ی حد تابع مشتق

فرض کنید تابع f در نقطه‌ی c پیوسته و در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر و $\lim_{x\to c}f'(x)=l$ است. دراین‌صورت f در نقطه‌ی c مشتق پذیر است و $f'(c)=l$.

۱- این قضیه برای مشتق‌های راست و چپ نیز با شرایط مناسب برقرار است.

۲- این قضیه برای $l=+\infty$ و $l=-\infty$ نیز برقرار است.

۳- عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی اگر f در c پیوسته باشد و $\lim_{x\to c}f'(x)$ موجود نباشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که $f'(c)$ موجود نیست.

۱۶- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\le x<1\\ 2x+2 & 1\le x<2\\ x^2+2 & x\ge 2\end{cases}$ **در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟** (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر
۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

پاسخ: گزینه‌ی ۳:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\le x<1\\ 2x+2 & 1\le x<2\\ x^2+2 & x\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2\ ,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=4\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=6\ ,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=6\end{cases}$$

بنابراین f در نقاط ۰ و ۲ پیوسته است و در ۱ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. در نقاط غیر از ۰، ۱ و ۲:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\le x<1\\ 2x+2 & 1\le x<2\\ x^2+2 & x\ge 2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\\ 2x & x>2\end{cases}$$

چون f در ۰ و ۲ پیوسته است، طبق قضیه‌ی حد تابع مشتق:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(0)=0\ ,\ f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}(1)=1$$
$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}(2)=2\ ,\ f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}(2x)=4$$

بنابراین f در ۰ و ۲ مشتق‌پذیر نیست. پس تابع در نقطه‌ی ۱ ناپیوسته و در نقاط ۰، ۱ و ۲ مشتق‌ناپذیر است.

۱۷- تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+b & x<1\\ \frac{b}{x}+1 & x\ge 1\end{cases}$ **در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b$ برابر کدام است؟**

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲:

$x=1$ شرط پیوستگی: $a+b=b+1\ \Rightarrow\ a=1$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\ \Rightarrow\ -\frac{b}{x^2}=2ax\ \xrightarrow{x=1}\ -b=2a\ \Rightarrow\ b=-2$$

(مهم) **فرض کنید u و v توابع پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. دراین‌صورت تابع** $f(x)=\begin{cases}u(x) & x\in\mathbb{Q}\\ v(x) & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ **در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است اگروتنهااگر $u(a)=v(a)$ و $u'(a)=v'(a)$ در این حالت مقدار $f'(a)$ با $u'(a)=v'(a)$ برابر است.**

۱۸- تابع $f(x)=\begin{cases}x^3-x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ **در چند نقطه مشتق‌پذیر است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه‌ی ۲:

$$\begin{cases}x^3-x^2=x^2\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ 2\\ 3x^2-2x=2x\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ \frac{4}{3}\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ } x=0$$